Augusto Rufasto

Infometrics & Business Protocol

MANUAL DE TEORÍA DE JUEGOS

Augusto Rufasto

http://www.geocities.com/arufast/juegos.html

MANUAL DE TEORÍA DE JUEGOS

http://www.geocities.com/arufast/juegos.html

Augusto Rufasto

Infometrics & Business Protocol

arufast@yahoo.com

http://rufasto.tripod.com

www.geocities.com/arufast

+56-9-136-3160

NOTAS PREVIAS

Matemáticas y teoría de juegos

Las matemáticas tienen aplicaciones fascinantes en numerosos terrenos, como es el caso de la física, la estadística pura, las finanzas y la economía. Determinados aspectos del comportamiento humano son también susceptibles de matematización. La estadística social, por ejemplo, analiza las características estructurales de la conducta de las personas que forman parte de grandes grupos humanos. La econometría, ciencia derivada de la estadística, permite estudiar importantes relaciones económicas y financieras. La teoría de juegos, como las ramas del conocimiento humano ya mencionadas, se ocupa de estudiar interacciones entre seres pensantes. La idea subyacente es, al igual que en toda aplicación matemática, simplificar problemas, resaltar los componentes esenciales de éstos, permitir generalizaciones y producir criterios que permitan tomar decisiones y actuar en forma inteligente. Todos estos beneficios son proyectados para el análisis de las competencias contra nuestros contrincantes. Entonces, situaciones complejas de rivalidad y de acción simultánea o reacción incierta pueden ser transformadas por medio de herramientas matemáticas en formulaciones sencillas de análisis directo.

Información y teoría de juegos

Una particularidad de la teoría de juegos es que posee menor cantidad de recursos de información que otras aplicaciones matemáticas. Por ejemplo, la estadística puede establecer márgenes de confiabilidad o umbrales de error definidos dependiendo del volumen de información disponible para análisis. Pero debido a la naturaleza del problema de competencia, se dispone de escasa información sobre los rivales o sobre otros agentes influyentes sobre el resultado de nuestras decisiones. De hecho, si se conociera el ciento por ciento de la información relevante sobre los intereses y mecanismos de decisión y acción de los competidores y demás agentes, no estaríamos hablando de un problema de teoría de juegos, sino de un problema de optimización. No podemos decir que la optimización pura abarca problemas de fácil solución. De hecho, la teoría de juegos se fundamenta en el cálculo de optimización. Además, la optimización pura es utilizada incluso para la generación de funciones matemáticas que reflejen eficientemente infinidad de eventos del mundo real. Pero la optimización pura recurre a abundantes datos, de la misma forma en que lo hace la estadística, y sus conclusiones tienen mayor o menor firmeza según el sostén teórico y el volumen y calidad de los datos. En el caso de la teoría de juegos surge el problema de la falta de datos. Por ello, la competencia contra el rival debe ser manejada mediante algo que puede ser descrito informalmente como una “adivinanza educada”.

Optimización y teoría de juegos

Como se mencionó, la teoría de juegos debe recurrir al soporte de la teoría y técnicas de optimización. A diferencia de la aplicación que recibe en otros campos de estudio, la optimización es utilizada en la teoría de juegos para producir criterios de decisión-acción que aprovechen la escasa información para producir la mejor adivinanza educada que fuese posible. En un extremo están los problemas en los que se carece absolutamente de información. En tales casos, la teoría debe presentar los mecanismos de decisión-acción que permitan operar en tinieblas. Naturalmente, aunque actuar en oscuridad con los criterios ótimos de la teoría de juegos es menos riesgoso que si se prescinde de ellos, el riesgo siempre es alto cuando se carece de información. En el otro extremo, cuando tenemos todos los datos necesarios, surge la situación ya mencionada en que sólo se requiere optimización pura, y en que la teoría de juegos ya no es requerida. Partiendo del punto de información cero, a medida que se dispone de información en mayor cantidad y calidad, las técnicas de optimización aplicadas a la teoría de juegos producen mecanismos de decisión-acción de cada vez menor riesgo. Por todo lo dicho, la teoría de juegos debe ser vista como un artefacto destinado a reducir el riesgo implícito por situaciones en que se carece de información respecto a los inetreses y modos de acción del competidos.

<u>Estadística y teoría de juegos</u>

El riesgo forma parte de todo proceso de competencia de naturaleza trascendente. Como vimos, la teoría de juegos reduce el riesgo de incurrir en fracaso como resultado de nuestras propias decisiones, pero no lo elimina. El riesgo es la contrapartida de la probabilidad de los eventos. Si un evento es p% probable de suceder, entonces el riesgo de que no suceda ese evento es (1-p)%. Veamos un ejemplo muy simplificado de una situación real: si decidimos comprar una patente cara porque pensamos que el mercado va a demandar los servicios derivados de ella, entonces el riesgo implícito es el complemento de la probabilidad de que en verdad haya una respuesta favorable. Al tratar con probabilidades, tratamos con riesgos. Si compramos la patente, lo hacemos porque es probable que haya considerable interés por parte de nuestros clientes potenciales. Si sucediera que (recordemos que se trata de un ejemplo muy simplificado) la demanda no es atraída por el producto o servicio derivado de la patente, entonces el evento probable no se produjo, y el riesgo cristalizó. Todo evento riesgoso siempre puede terminar de manera desfavorable. La teoría de juegos puede crear los mecanismos para definir la naturaleza del riesgo que enfrentamos (en muchos casos podrá incluso “inventar” criterios), pero no termina con le problema del riesgo. Por lo tanto, si un individuo se decide a adquirir un terreno porque la teoría de juegos le muestra que es probable que una serie de agentes se interesen en arrendar diferentes secciones de tal espacio, ha de tomar en conciencia del nivel de riesgo asumido. Pero si este proceso se llega a repetir con exactamente las mismas características en todos los casos en un número grande de veces, entonces el conjunto total de acciones ofrecerá ventaja para nuestro agente. Esta es una consideración interesante, pero dado que es teórica no es aconsejable tomarla como una referencia concluyente.

<u>Una nota personal</u>

He constatado que en los útlimos tiempos son más las personas interesadas en adquirir conocimientos sobre teoría de juegos. En verdad, la teoría de juegos es un cuerpo teórico compuesto por una gran variedad de sistemas de análisis , herramientas y modelos. Matemáticos puros, economistas téoricos y psicólogos convergen en la producción de nuevas aproximaciones. Cada aproximación más específica y detallada requiere de conjuntos de referentes particulares, por lo que la discusión de estos temas es muy especializada. Si afirmo que estas aproximaciones especializadas son de acceso y comprensión gradualmente más restringido, no debe entenderse por eso que las aproximaciones primarias a la teoría de juegos pecan de excesivamente sencillas o triviales. A respecto, mi posición es la contraria, y creo que las aproximaciones primarias a la teoría de juegos tienen un valor marginal mucho más alto que el de las diversas aproximaciones sofisticadas que pudiesen ser generadas. Dicho valor marginal está dado porque se trata de crear nuevos espacios en la mente para la toma de conciencia de la importancia así como para la funcionalización del análisis de procesos de competencia y acción interdependiente. Debo añadir que esta obra puede crecer explorando en profundidad los conceptos básicos considerados. Por esto, no uso como pretexto para no trabajar en el crecimiento de la obra la naturaleza básica de estas aproximaciones. Espero poder trabajar en el crecimiento de esta obra en el tiempo que viene y de esa manera ofrecer al interesado diversas consideraciones más poderosas al nivel básico de estos estudios.

A.R.

CONTENIDO

Introducción a la Teoría de Juegos

Definición

La Teoría de Juegos es un tipo de análisis matemático orientado a predecir cuál será el resultado cierto o el resultado más probable de una disputa entre dos individuos. Fue diseñada y elaborada por el matemático John von Neumann y el economista Oskar Morgenstern en 1939, con el fin de realizar análisis económico de ciertos procesos de negociación. Von Neumann y Morgenstern escribieron el libro The Theory of Games and Economic Behaviour (1944).

A.W. Tucker es quien diseñó el famosísimo problema del "Dilema del Prisionero". El matemático John Forbes Nash, Jr. (1928-) creó en 1950 la noción de "Equilibrio Nash", que corresponde a una situación en la que dos partes rivales están de acuerdo con determinada situación del juego o negociación, cuya alteración ofrece desventajas a ambas partes. Otros importantes representantes de la teoría de juegos fueron el húngaro nacionalizado estadounidense John Harsanyi (1920-) y el alemán Reinhard Selten. Nash, Harsanyi y Selten recibieron el Premio Nobel de Economía de 1994 por sus contribuciones a la Teoría de Juegos.

Importancia de la Teoría de Juegos

Un juego es un proceso en que dos o más personas toman decisiones y acciones, la estructura de las cuales está inscrita en un conjunto de reglas (que pueden ser formales o informales), a fines de obtener beneficio. Cada combinación de decisiones y acciones determina una **situación** particular, y, dado que las decisiones y acciones de los agentes involucrados (llamados los **jugadores**) pueden ser combinadas de numerosas formas, las situaciones generadas también serán numerosas y su magnitud igual a las de las combinaciones de decisiones y acciones de los agentes. El conjunto total de situaciones posibles es el **cuadro situacional del juego**. Siguiendo con este razonamiento, encontramos que cada situación (es decir, cada punto del cuadro situacional) genera una combinación de premios determinada. El premio que le da a un jugador una situación particular puede ser comparado con los premios que le ofrecen las otras situaciones.

Un concepto importante es el de **pago**. Como se dijo, cada situación particular ofrece una combinación de premios, de la manera siguiente: si se trata de dos jugadores, la situación ofrece un premio para el primero y otro para el segundo. Si se trata de tres jugadores, la situación genera un premio para cada jugador. Ésta es la lógica de los premios y las situaciones. A cada premio se le llama pago.

La Teoría de Juegos nos ayuda a analizar juegos en los que dos o más personas compiten por un único premio o pago (juegos de **suma cero** de los pagos) y juegos en los que se compite por premios que pueden ser obtenidos simultáneamente (juegos de **suma no-cero**). La Teoría de Juegos enseña que la interacción de los jugadores generará una situación más probable, o un conjunto de situaciones igualmente probables. A esta situación o conjunto de situaciones se les llamará la **solución del juego**. La solución del juego se sustenta en que la conducta de cada jugador llega a *engancharse* con la de los otros, derivando todo esto en situaciones más fuertes que otras. Las situaciones más fuertes son las que serán producidas con la mayor probabilidad, y debido a esto es que se considera que la solución o desenlace del problema del juego corresponde a la situación o situaciones más fuertes, más probables.

Viene aquí lo que yo considero el corazón de los beneficios ofrecidos por la Teoría de Juegos. El análisis de un juego lleva muchas veces a que se determine cuál va a ser el punto final de solución de dicho juego A este resultado se le denominará resultado **inminente o fatal del juego**. Debo decir, no obstante, que en la realidad existen muchos juegos cuyo final es *imposible de determinar*, incluso con la ayuda de la Teoría de Juegos: estos juegos no tienen resultados inminentes, o, si es que los tienen, éstos no son previsibles y la Teoría de Juegos no puede predecirlos. Tal es el caso de un juego de ajedrez, el cual es un juego de suma cero: todo lo que la Teoría de Juegos nos puede decir acerca de este juego es que uno de los dos jugadores ganará y el otro perderá el juego. Al margen de esta grave circunstancia, la Teoría de Juegos sí puede ayudarnos a determinar los resultados de otros muchos importantes juegos y situaciones de negociaciones e intereses en conflicto. La Teoría de Juegos es importante porque permite hallar los resultados inminentes o fatales de numerosos juegos diversos que debemos enfrentar cotidianamente en el mundo real. La Teoría de Juegos no deja de ser importante sólo porque no puede analizar la totalidad de los juegos que jugamos en el mundo real.

Aplicaciones de la Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos tiene aplicaciones de tipo económico. Dado que todos somos agentes económicos, conviene estudiar esta teoría, a fines de entender qué operaciones teóricas y prácticas podrían ofrecernos premios monetarios más grandes. Algunas aplicaciones de la Teoría de Juegos a la vida real son las siguientes:

- Contratos
- Guerras militares
- Guerras comerciales
- Marketing para la competencia en los mercados
- Negociaciones domésticas
- Negociaciones comerciales
- Negociaciones colectivas
- Alianzas

Debe incluirse en la lista a cualquier otra situación en que dos o más individuos requieran interactuar a fines de obtener ganancias económicas. Como el ser humano es un *homo economicus* tanto como un *homo ludicus*, él puede encontrar infinidad de aplicaciones a la Teoría de Juegos

El sabio rey Salomón hace uso de la Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos es una disciplina que involucra en grado alto la capacidad analítica y proyectiva del ser humano. Es, a la vez, una disciplina susceptible de ser aplicada a diversidad de casos. Para mostrar ambas cosas simultáneamente, me valdré de la conocida historia de las madres y el rey Salomón.

Salomón recibió a dos mujeres que declaraban ser las madres de un bebé (1 Reyes 3, 16-28). Ante la ausencia de datos o indicios tangibles, debía creerse bien a una o a la otra, luego de lo cual el bebé sería entregado a la mujer considerada la madre de éste. Demostrando que su gran sabiduría lo relevaba de la necesidad de mayor información, Salomón elaboró un juego, el cual tomó la forma de una propuesta: "Con esta espada habrá de partirse al bebé, luego de lo cual se dará una mitad del niño a cada mujer". Inteligentemente, el sabio rey recurrió a una proposición perfectamente aceptable si ella era aplicada a juicios sobre materias y objetos comerciales. Este juego exaltaría la voluntad competitiva de obtener ganancia en grado máximo. El truco de Salomón consistía en que una valoración primordial de competencia rivalizaba con la valoración dictada por el amor maternal.

El criterio de optimización individual llevó a una de las madres a aceptar la peculiar propuesta salomónica. El criterio de amor maternal llevó a la otra madre a pedir una solución inscrita en la optimización colectiva: prefería que el niño siguiera entero, contentándose con sólo saber que él seguía vivo, aun si no pudiera nunca más volver a verlo.

En este caso lo que sucedió es que Salomón conocía la naturaleza del bienestar que siente una madre en relación a tener a su hijo. Salomón entendió que toda madre observa la siguiente escala de valores:

- Primero: Que su hijo exista, que conserve su vida.
- Segundo: Tener a su hijo consigo.

Salomón hizo la suposición de que sólo la verdadera madre podría instintivamente conocer y respetar esta escala. Trabajando en base a dicha suposición, las sometió a una crisis, cuya solución evidente les permitiría acceder a sólo una parte del premio, o a renunciar completamente el premio. Este premio era la tenencia del hijo, es decir, un pago correspondiente al segundo nivel de la escala de valores.

La falsa madre, por su parte, tenía la siguiente escala de valores:

- Primero: Tener al hijo consigo.
- Segundo: Conservar por lo menos una parte del hijo consigo.

Esto, traducido a términos análogos a los de la escala de valores de una verdadera madre, toma la forma de:

- Primero: Tener al hijo consigo.
- Segundo: Aunque eso conllevara la pérdida de su vida, conservar una parte del hijo consigo.

Sin embargo, eso mismo llevado a una escala de valores materiales, equivale a:

- Primero: Ganar todo el premio.
- Segundo: Ganar al menos una parte del premio.

Es decir que la lógica de la falsa madre era materialista, mientras que la lógica de la verdadera madre era "lógica de madre". De hecho, Salomón supuso que la falsa madre seguiría la lógica materialista que es apropiada para la mayoría de problemas de obtención de premios, en tanto que la verdadera madre seguiría la lógica de madre. El problema impuesto por Salomón, de cumplirse las suposiciones de sabio, quitaría el disfraz de madre a la falsa madre.

Para desarrollar una aplicación de la Teoría de Juegos a un caso real

Para usar la Teoría de Juegos como una aplicación para una situación real, se requiere construir modelos simplificados de la realidad. En estos modelos, se tendrá que representar a cada jugador con sus respectivas formas de conducta. Cuando se trata de un juego en que usted enfrenta a un único rival, normalmente puede usted decir que conoce perfectamente cuál es su propia forma de actuar, pero ignora o conoce sólo en parte la de su rival u oponente. Por esto se hace más fácil representar simplificadamente su propia conducta que representar la conducta del rival.

En cualquier caso, se requiere representar adecuadamente las conductas de los dos (o más) jugadores que intervienen. Nuestra conducta será conocida con certidumbre, mientras que la del rival sólo en forma probable (en lenguaje científico, *estocástica*). A veces se necesitará plantear dos o más representaciones de la conducta probable del rival. Cada representación recibe el nombre de escenario. Cada escenario es un juego simple. El conjunto de dos o más escenarios es un juego compuesto.

Conceptos Básicos de la Teoría de Juegos

La conducta de un jugador

Se requiere tipificar la conducta de cada jugador, de manera que pueda saberse de qué forma probable o cierta se comportará el jugador. La regla de oro del análisis de juegos es la siguiente: “cada jugador buscará su máximo bienestar posible”. De esta forma, cuando estudiemos el proceder de un jugador, sabremos que éste deberá calificar cada situación y perseguir siempre las situaciones particulares que ofrezcan el mayor bienestar.

La función de utilidad

Un concepto central es el de la función de utilidad. La función de utilidad convierte a los pagos en bienestar. Por ejemplo, si se consiguió un pago de veinticinco dólares, éste pago podría generar un bienestar de veinticinco unidades de bienestar, y estaríamos hablando de una función **identidad**. Si, por ejemplo, la función de utilidades fuese una **raíz cuadrada**, el pago de veinticinco dólares correspondería sólo a un bienestar de cinco unidades de bienestar. En este documento nos ocuparemos principalmente de funciones de utilidad identidad. Cuando se requiera tratar funciones de utilidad diferentes (como la raíz cuadrada), presentaré los criterios de tratamiento de tales funciones.

La solución y el valor de la solución de un juego

La solución de un juego es la combinación de ganancias o pérdidas que da el juego con certidumbre o con alta probabilidad a los jugadores. Si el juego es **suma cero**, lo que ganan unos lo pierden otros.

En el análisis matricial de un juego de dos jugadores, se denota el valor del juego como la ganancia o pérdida que da éste, una vez resuelto, al jugador A (que equivale a la pérdida o ganancia que obtiene el jugador B).

Cuando el juego es **suma no-cero**, se denota el valor del juego como la combinación de las ganancias que el juego da, una vez resuelto, a los jugadores.

De un juego suma cero se dice que es socialmente justo si el valor de éste es cero. Que el valor del juego sea cero implica que tanto A como B obtienen ganancia cero. Un juego suma cero que no fuera socialmente justo daría una ganancia de, digamos, M dólares a A y una pérdida de M dólares a B.

Orden de los movimientos en el juego

Un juego puede ser de movimientos simultáneos o de movimientos secuenciales. El popular juego de "piedra-papel-tijera" es un juego simultáneo, mientras que las damas y el ajedrez son juegos secuenciales. Cada uno de estos tipos de juego presenta diferentes focos de interés para la teoría de juegos.

Las herramientas de análisis de la Teoría de Juegos

Existen diferentes herramientas para modelar y analizar un juego, entre ellas:

- La Matriz de Pagos o Pay-Off Matrix
- Las Curvas de Reacción
- Los árboles de resultados sucesivos

La Matriz de Pagos

La Teoría de Juegos estudia una gran parte de juegos bipersonales por medio del análisis matricial. El análisis matricial corresponde a la expresión, mediante matrices, de las situaciones que pueden ser generadas por las alternativas de decisión y acción de dos jugadores. El análisis matricial recurre a la forma llamada "Matriz de Pagos" (en inglés, *Pay-Off Matrix*) la cual presentará las diversas opciones de decisión y acción de cada jugador y las resultantes situaciones particulares. En efecto, la intersección o combinación de la alternativa elegida por un jugador y la alternativa elegida por otro crea un único punto, de coordenadas (decisión del jugador A, decisión del jugador B). La situación particular definida por ese punto tiene un valor, que es la combinación de premios obtenida por los dos jugadores. A cada jugador le corresponde un premio (cuando el premio tiene valor negativo, se convierte en un castigo). En los juegos suma cero, el premio de un jugador es exactamente igual al castigo del otro. Se trata de "decidir entre yo y mi rival".

La Matriz del juego "¿Iguales o Distintas?"

Suponga que dos personas encuentran un reloj. Sólo una de las dos puede quedarse con él, y deciden determinar por azar quién se quedará con el reloj. Cada una tiene en su bolsillo monedas de medio dólar y de un dólar. Con la mano derecha cada jugador debe coger y mantener oculta una moneda. Si las dos monedas son iguales, el jugador A se queda con el reloj. Si las dos monedas son diferentes, el jugador B se queda con el reloj. Es decir que si uno gana, el otro pierde. Veamos la expresión matricial de tal juego:

	B elige un dólar	B elige medio dólar
A elige un dólar	1	-1
A elige medio dólar	-1	1

El juego expuesto es una variante de un juego estilizado llamado "¿Iguales o Distintas?". La matriz presentada es una matriz de suma cero. De esa forma, sólo se ve las ganancias de jugador A, entendiéndose que las ganancias del jugador B son fácilmente calculables: si A gana 1, B gana –1 (porque pierde 1) y si A gana –1 (es decir que pierde 1), B gana –(-1), que equivale a 1, o sea que B gana 1.

Curvas de Reacción

En la teoría de juegos, las curvas de reacción muestran, en un gráfico cartesiano, las combinaciones de decisiones (puede ser en las abscisas) y pagos (puede ser en las ordenadas). Un ejemplo sencillo de curvas de reacción puede verse en las curvas de oferta y demanda. Supóngase que demanda y oferta son construídas por tanteo, según propuestas de precios a cobrar y pagar realizadas por un ofertante y un demandante en relación a una cantidad determinada a negociarse en el mercado. Las combinaciones (X^*, p^d) ofrecidas y las combinaciones (X^*, p^d) propuestas por el demandante determinarán que exista una diferencia de precios ($p^d – p^s$) mayor, menor o igual a cero. Si la diferencia es mayor que cero, el demandante debe decidir si le conviene proponer un nivel de negocios diferente combinado con un precio a pagar inferior. El ofertante debe, asimismo, decidir si propondrá un nivel de negocios diferente combinado con un precio a pagar superior. El procedimiento es similar cuando la diferencia es menor que cero: el ofertante quizás proponga un precio menor y el demandante quizás proponga un precio mayor. En el caso descrito por los mercados que siguen la ley de la oferta y la ley de la demanda, se demuestra que existe una combinación solución (X, p) que presenta convergencia y estabilidad.

En este modelo de mercado, se realiza un secuencia de movimientos, tomando como “señal” a la diferencia de precios. Los turnos son dobles, es decir que los dos jugadores actúan simultáneamente.

Árboles de resultados sucesivos

Un diagrama de árbol de resultados sucesivos se utiliza en juegos que implican secuencias de movimientos (un movimiento es un binomio decisión-acción). En este árbol, se define un punto de partida (por ejemplo, la posición inicial del jugador A). A partir del inicio, se extienden ramas que representan los diferentes movimientos que puede realizar el jugador que inicia la competencia. Los diferentes movimientos o ramas definirán igual número de resultados o pagos, que pueden servir como punto de partida para nuevas decisiones del jugador siguiente (por ejemplo, el jugador B). El proceso se repite hasta completar el número de movimientos que A y B pueden realizar. Un juego con un movimiento para A y uno para B posee dos generaciones de ramas. Un juego con dos movimientos para A y dos movimientos para B posee cuatro generaciones de ramas. En general, un juego con movimientos para A y n movimientos para B (el valor absoluto de m-n no puede ser mayor que 1) tiene m+n generaciones de ramas. Las puntas de las ramas de última generación contienen la descripción de los posibles resultados del juego. En el caso particular de que tanto A como B pudieran tomar sólo dos decisiones en cada estadio del juego, el número de puntas del árbol será 2^{m+n}.

Equilibrio Nash

Dada una situación cualquiera definida por una elección de A y una elección de B, si ocurre que A supone que B no modificará su elección y opta por no modificar la suya propia y, simultáneamente, B supone que A no modificará su elección y opta también por no modificar la suya, se dice que tal situación es un equilibrio Nash. Como se ve, el equilibrio Nash es una situación que presenta ventajas para los dos jugadores, y en razón de tales ventajas, ni A ni B cambiarán de decisión. Cuando se trata el problema del análisis de los juegos, la definición de un equilibrio Nash indica que este equilibrio es un conjunto de acciones tales que ninguno de los jugadores, si considera que las acciones de su oponente están dadas, deseará cambiar su propia acción. Un equilibrio Nash es una situación de juego en la cual, una vez que cada jugador, cuando considere que las acciones tomadas por el contrincante sean invariables, se resistirá a variar su propia acción.

En un equilibrio Nash, el jugador observará que, como la acción de su rival está predeterminada, él mismo podrá elegir su propia acción dentro de una gama de posibilidades. Si el juego ha resultado en una situación $S_{1i,2j}$ correspondiente a un equilibrio Nash en la que el jugador efectúa una acción i y el rival una acción j, el jugador rechazará cualquier posibilidad de realizar una acción distinta de i.

La conducta de dos jugadores puede definir cualquiera de las siguientes situaciones:

- El equilibrio Nash corresponde al resultado de aplicar **estrategias puras** (es decir, decisiones y acciones que se toman con certeza, equivalente a una probabilidad del 100%).
- El equilibrio Nash corresponde al resultado de aplicar **estrategias mixtas** (es decir, decisiones y acciones que se toman con una probabilidad inferior al 100%).
- Existe un equilibrio Nash dentro del juego.
- Existen dos o más equilibrios Nash dentro del juego.
- No existe ni siquiera un equilibrio Nash.

Estrategias puras y estrategias mixtas

Una estrategia pura es aquella decisión que se toma con certeza. En contraposición a tal concepto, una estrategia mixta es una combinación de decisiones tomada de auerdo a una serie de probabilidades, la suma de las cuales debe necesariamente dar el 100%. Cuando un problema no alcanza una solución vía estrategias puras, con frecuencia puede ser enfocado desde una perspectiva de estrategias mixtas. Así, se dice que los problemas que no tienen solución vía estrategias puras pueden tenerla vía estrategia mixtas. Ambas situaciones pueden ser vistas como soluciones ciertas versus gamas de soluciones probables.

Los equilibrios de estrategias puras pueden constituir diversas magnitudes, como un único equilibrio, dos o más equilibrios (un número discreto), infinitos equilibrios en un subconjunto del total de situaciones finales del juego, o infinitos equilibrios que cubren la totalidad de situaciones finales del juego. En cualquier caso, un equilibrio de estrategia pura es una situación final cuya probabilidad de dar máximo beneficio (dentro de la vecindad de situaciones) a los dos jugadores es uno.

Como se dijo, cuando no hay equilibrios Nash de estrategias puras, con frecuencia es posible determinar equilibrios Nash de estrategias mixtas. Es usual en tales contextos hallar multiplicidad de equilibrios Nash de estrategias mixtas, cada equilibrio asociado a un par de decisiones de los jugadores, cada decisión a su vez asociada a una probabilidad de ser tomada. Por ello, podemos decir que el análisis Nash arroja como resultado las distribuciones de probabilidad que producen los equilibrios Nash.

El método para encontrar las distribuciones de probabilidad de las estrategias mixtas consiste en suponer que un subconjunto de las situaciones finales (el cual puede a veces cubrir el conjunto total de situaciones finales) posee un valor esperado único y máximo. De esa manera, puede calcularse las distribuciones de probabilidades que permiten que se produzca esa equivalencia. Los detalles técnicos del método no serán discutidos aquí.

Las decisiones de los jugadores llevan asociadas distribuciones de probabilidades calculadas del modo ya descrito. Dos jugadores determinarán así un área de distribución de las probabilidades asociadas a las situaciones finales. Algunas situaciones finales serán más probables que otras.

Análisis Matricial en la Teoría de Juegos

Una Matriz de Suma Cero

Considérese el siguiente juego suma cero:

"Dos empresas llamadas A y B compiten por entrar en un nuevo mercado de refrescos. Tanto A como B deben decidir entre dos acciones, las que son (1) no entrar en el mercado de refrescos, y (2) entrar en el mercado de refrescos. Si A y B deciden entrar simultáneamente, las ventajas competitivas de la empresa A le darán todo el mercado e incluso se beneficiará de las inversiones publicitarias de B. A gana 9 millones de dólares, mientras que B pierde esa misma cantidad. Si A decide entrar, pero B no, entonces A se queda con el mercado, pero no pudiendo aprovechar todas las inversiones de B, sólo gana 3 millones de dólares. B pierde un moto parcial de su inversión, correspondiente también a 3 millones de dólares. Si B decide entrar, pero A no, B se queda con todo el mercado, que la da una ganancia de cuatro millones de dólares. A pierde una inversión parcial por ese mismo monto. Pero si ni A ni B deciden entrar en el mercado, ninguno de los dos gana o pierde."

Así expuesto el caso, el análisis de él puede volverse un poco engorroso. Veamos cuál sería la expresión matricial del caso:

	B decide 1	B decide 2
A decide 1	0	3
A decide 2	-4	9

Todo lo expresado en el párrafo se ha reducido a una forma matricial sencilla. Las formas matriciales deben ser analizadas por medio de diversas técnicas, como la dominancia de opciones, la historia de las características de rival o la minimización del riesgo.

Una Matriz de Suma No-Cero

En una Matriz de suma no-cero, la ganancia de un jugador no está necesariamente vinculada directamente con la pérdida del otro. Dicho de otra forma, ambos pueden ganar simultáneamente y ambos pueden perder simultáneamente. Considérese el siguiente caso:

"A y B deben decidir simultáneamente sobre un caso. Si A se decide por su primera opción y B también lo hace, tanto A como B pierden dos mil dólares. Si A se decide por su primera opción y B se decide por su segunda opción, A gana tres mil dólares y B pierde esa cantidad. Si A se decide por su segunda opción y B se decide por su primera opción, A pierde tres mil dólares y B los gana. Finalmente, si A y B se deciden por sus segundas opciones, tanto A como B ganan, cada uno, dos mil dólares".

Veamos la expresión matricial de este caso:

	B decide 1	B decide 2
A decide 1	-2, -2	3, -3
A decide 2	-3, 3	2, 2

Este caso es una variante de los casos de estructura llamada “Dilema del Prisionero”. Al ver la matriz, el lector puede identificar un punto en que “todos ganan”. Este punto es **A2-B2**. También hay otro punto en que “todos pierden”. Este punto es **A1-B1**. ¿Puede el lector adivinar la solución que será alcanzada por nuestros dos jugadores? Uno estaría inclinado a pensar en que el razonamiento de la búsqueda del bienestar nos llevará a elegir “todos ganan” por contrario a “todos pierden”. Un análisis sencillo y elegante nos indicará, no obstante, que la solución de este juego es “todos pierden”. Más adelante nos ocuparemos en profundidad de este interesante caso.

Un Juego Suma Cero puede ser expresado matricialmente como un Juego Suma No-Cero: El juego “¿Iguales o Distintas?”

Como lo dice el subtítulo, un juego suma cero puede ser expresado matricialmente como si se tratara de un juego suma no-cero. Veamos a continuación el caso del juego llamado “¿Iguales o Distintas?”:

“A y B inician un juego de tarjetas. Ambos escogerán cada uno una tarjeta blanca o negra, sin exponer el color al contrario. Al revelar los colores elegidos, si los éstos son iguales, B paga un dólar a A. Si los colores son distintos, A paga un dólar a B”.

Puede verse que éste es un juego suma cero. La matriz suma cero de este juego es:

	B elige blanco	B elige negro
A elige blanco	1	-1
A elige negro	-1	1

La matriz escrita bajo notación extendida de tipo suma no-cero será la siguiente:

	B elige blanco	B elige negro
A elige blanco	1, -1	-1, 1
A elige negro	-1, 1	1, -1

Análisis de la dominancia de opciones

La dominancia de estrategias puede ayudar a resolver diversos juegos. La dominancia de estrategias consiste en identificar qué opciones dominan a otras y qué opciones son dominadas por otras. Retomemos la matriz de nuestro caso de la competencia de los refrescos. En el caso de A, vemos que decidirse por la opción 1 puede darle como resultado la ganancia nula o un puntaje de tres. Si se decide por 2, puede ganar 9 o perder 4. La posición de A tiene un valor, pero para que dicho valor sea estimable es necesario conocer la probabilidad con la que B tomará cualquiera de sus opciones. Sin el conocimiento de esa probabilidad, no puede saberse si la opción **A1** domina a la opción **A2**, o viceversa.

El caso de B es diferente. B siempre decidirá tomar la opción 1, ya que prefiere no perder nada a perder 3 puntos, y prefiere ganar 4 puntos a perder 9. La opción **B1** domina a la opción **B2**. Puede decirse también que la opción B2 está dominada por la opción **B1**. La probabilidad de que B decida 1 es 100% y la probabilidad de que decida 2 es 0%.

El análisis de la dominancia de opciones sirve para reescribir el juego, eliminando simpre las opciones dominadas. El juego se transforma en:

	B decide 1
A decide 1	0
A decide 2	-4

Tanto B como A son conscientes de esta situación. Dado que la situación se ha simplificado, A puede ver las cosas con más claridad, y realizar un nuevo análisis de la dominancia de sus opciones. Naturalmente, sabiendo que B decidirá definitivamente 2, a A no le queda más remedio que optar por 1, que es la estrategia que domina a la otra. El juego se transforma en:

	B decide 1
A decide 1	0

Por lo que la solución del juego es **A1-B1**, y el resultado del juego es la ganancia nula para ambos jugadores. Este juego es **socialmente justo**.

En realidad, son pocos los juegos que pueden ser resueltos mediante el análisis de dominancia. El procedimiento de análisis de dominancia suele tener aplicación limitada, es un mecanismo de "simplificación" de problemas. Son muchos los problemas que, sometidos al análisis de dominancia, no pueden ser simplificados. Véase el siguiente ejemplo:

	B decide 1	B decide 2
A decide 1	0	2
A decide 2	3	0

En este caso, ni B ni A tienen estrategias dominadas o dominantes.

Análisis de la historia y características del rival

Para la resolución de un juego no simplificable por dominancia, se requiere del conocimiento o de la estimación científica de la probabilidad asociada a cada opción del rival. Supongamos que A sabe que la historia de B muestra que el 25% de las veces tomó la decisión 1 y el 75% de las veces tomó la decisión 2. En ese caso, A puede decir que B tomará la opción 2 con una probabilidad del 75%. Siendo ésta la situación, A tendrá que aprovechar ese conocimiento para decidir la opción más adecuada a **B2** dentro de la matriz. Tal decisión resulta ser **A1**. El 25% restante de las veces, A tomará la decisión **A2**. Ésta, como puede verse, es una **estrategia mixta**.

Para poder garantizar que su distribución decisional será ésta, A tendrá que hacer uso de un **dispositivo generador de números aleatorios (GNA)**. Tal dispositivo puede ser creado por medio del uso de dados, ruleta, monedas o cualesquiera otros medios de generación de azar. También puede hacerse uso de una calculadora científica o de un programa de computación.

Si no se tiene este conocimiento de la historia del rival, puede realizarse un **análisis probabilístico del riesgo mínimo**. Luego de este análisis, también se tendrá que aplicar una **estrategia mixta**.

Cálculo matricial en teoría de juegos

Obsérvese la siguiente matriz:

	B decide 1	B decide 2
A decide 1	0	2
A decide 2	3	0

En este caso, ni B ni A tienen estrategias dominadas o dominantes. Si conociéramos la historia del rival, sabríamos cuál es la distribución de probabilidades de su conducta, y eso nos daría la idea de cuáles son los puntos solución de la matriz. Supongamos, no obstante, que se carece del conocimiento de la historia del rival. En estos casos, se diseña y ejecuta una estrategia de combinación probabilística de decisiones. A este tipo de estrategia se le denomina “estrategia mixta”. La aplicación de estrategias mixtas al ejemplo que estamos revisando requiere del análisis del riesgo mínimo. Este análisis considera lo siguiente:

- A desea que, cualquiera que sea su decisión, el juego tienda a darle el mismo valor.
- B desea que, cualquiera que sea su decisión, el juego tienda a darle el mismo valor.

El valor del juego para A será $0p_1+3p_2$ si B opta por **B1**, y $2p_1+0p_2$ si B opta por **B2**. En resumen, si B opta por **B1**, el juego tendrá un valor probable de $3p_2$, y, si B opta por **B2**, el juego tendrá un valor probable de $2p_1$. Como se ve, son dos los valores probables que arroja el análisis realizado por A. Si A desea minimizar su riesgo, opta por la mezcla de probabilidades p_1=60%, p_2=40%. No importa qué haga, A siempre tendrá el mismo valor probable para el juego. Este valor probable para el juego es 1.2.

B hace el mismo cálculo y encuentra que sus probabilidades para llegar al mínimo riesgo son q_1=40% y q_2=60%.

Análisis de la solución y del final del juego

El atractivo de la Teoría de Juegos consiste en la determinación de futuros probabloes y esperados. En este caso, nada hay que pueda hacer B para cambiar el final promedio del juego. Sin embargo, la solución del juego no está determinada. A y B deberán recurrir a un GNA para decidir la opción que tomará cada uno. Veamos las situaciones que surgirán como probables escenarios finales del juego:

	B decide 1	B decide 2
A decide 1	0, 24%	2, 36%
A decide 2	3, 16%	0, 24%

Vemos que el resultado final del juego comprende 3 escenarios:

- Valor 0 (valor equilibrado, nadie gana): 24%*2 = 48%

- Valor 2 (A gana 2, B pierde 2): 36%
- Valor 3 (A gana 3, B pierde 3): 16%

Aunque tanto A como B usarán cada uno un GNA (ruleta) para decidir su curso de acción (la ruleta de A es 1 al 60% y 2 al 40%, mientras que la de B es 1 al 40% y 2 al 60%), el final inmediato del juego estará distribuido de acuerdo a una "ruleta grupal" (como vimos, equilibrio al 48%, A gana 2 al 36% y A gana 3 al 16%). Finalmente, el juego tiene una tendencia a estabilizarse en un valor prorrateado de 1.2 (A gana 1.2, B pierde 1.2), como resultado de la repetición del juego numerosas veces.

Planteamiento y solución del juego suma cero de 2 personas con *n* opciones para A y *m* opciones para B

La formulación y solución de este problema hace uso de la programación lineal. El jugador A posee una distribución de probabilidades para sus opciones igual a:

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

El jugador B posee una distribución de probabilidades para sus opciones igual a:

$$\{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$$

Probabilidades de A

A busca el mayor valor para su juego. Sea V el valor que A espera del juego. Debemos maximizar este valor:

$$\begin{aligned}
&\max(V)\\
&\text{sujeto a:}\\
&V \le E_{A1} = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n\\
&V \le E_{A2} = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n\\
&\quad\vdots\\
&V \le E_{Am} = a_{1m}p_1 + a_{2m}p_2 + \ldots + a_{nm}p_n\\
&\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1\\
&p_1, p_2, \ldots, p_m \ge 0
\end{aligned}$$

<u>Análisis bajo la premisa de que A gana el juego</u>

Si **presuponemos que el juego V tomará valor positivo** (o sea que gana A al final o el juego llega a ser equilibrado) y usamos además la transformación $r_j = q_j/V$, el problema puede tomar la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\max(V)\\
&\text{sujeto a:}
\end{aligned}$$

$$1 \le a_{11}r_1 + a_{21}r_2 + \ldots + a_{n1}r_n$$
$$1 \le a_{12}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{n2}r_n$$
$$\vdots$$
$$1 \le a_{1m}r_1 + a_{2m}r_2 + \ldots + a_{nm}r_n$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} r_i = \frac{1}{V}$$
$$r_1, r_2, \ldots r_n \ge 0$$

Aprovechando la relación inversa existente entre la sumatorias de los r y el valor del juego, V, podemos escribir una expresión de mayor simpleza y elegancia:

$$\min(r_1 + r_2 + \ldots + r_m)$$
sujeto a:
$$a_{11}r_1 + a_{21}r_2 + \ldots + a_{n1}r_n \ge 1$$
$$a_{12}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{n2}r_n \ge 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}r_1 + a_{2m}r_2 + \ldots + a_{nm}r_n \ge 1$$
$$r_1, r_2, \ldots r_n \ge 0$$

Una vez resuelto este problema de Programación Lineal, se obtendrá m valores r_j. Si todos los valores r_j resultaron ser 0, ello demostraría que nuestra suposición de que el juego es ganado por A es incorrecta. Pero si al menos un valor r_j no es cero, entonces habremos llegado a la solución en valores r del juego. Adicionalmente, podemos dar el valor V del juego, que será positivo (ganado por A):

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n} r_i}$$

Puede calcularse el valor de cada probabilidad p_j (probabilidades de decisión y acción de A) mediante la fórmula:

$$p_j = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{i=n} r_i}$$

Nótese que estos cálculos sólo tienen sentido si al menos un r_j es diferente de cero y si ninguno es infinito. En otros casos, el valor de V aparece como cero o infinito y las probabilidades p_j como indeterminadas. Veamos un ejemplo para valor V positivo:

	b1	b2	b3	b4
a1	2	5	4	3
a2	7	9	2	10
a3	11	6	3	2

En este juego, A lleva las de ganar. El resultado del juego será positivo. Analizamos este juego con la herramienta Solver de Excel. El programa arroja un resultado válido, que es el siguiente:

	1	2	3
r	0.209726444	0.03039514	0.03343465
p	76.67%	11.11%	12.22%

El cuadro nos muestra que A siempre tenderá a usar la línea de acción 1 con un 76.67% de probabilidad, dando sólo 11.1% de peso a la acción 2 y 12.22% a la acción 3 El valor de este juego es 3.66.

Probabilidades de B

Ahora veremos el cálculo de las probabilidades de B. Como el juego es suma cero, -V es el valor que espera B. B asignará sus probabilidades de manera que él (B) obtenga máximo valor en el juego, por lo que él deberá minimizar el valor de V (valor del juego para A). Así, minimizaremos el valor de V y veremos qué conclusiones podemos obtener de ello:

$$
\begin{aligned}
&\min(V)\\
&\text{sujeto a:}\\
&V \geq E_{B1} = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1m}q_m\\
&V \geq E_{B2} = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2m}q_m\\
&\vdots\\
&V \geq E_{Bn} = a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \ldots + a_{nm}q_m\\
&\sum_{i=1}^{i=m} q_i = 1\\
&q_1, q_2, \ldots, q_m \geq 0
\end{aligned}
$$

<u>Análisis bajo la premisa de que A gana el juego</u>

Si **presuponemos que el juego V tomará valor positivo** (o sea que gana A al final o el juego llega a ser equilibrado) y usamos además la transformación $r_j = q_j/V$, el problema puede tomar la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\min(V)\\
&\text{sujeto a:}\\
&1 \geq a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \ldots + a_{1m}r_m\\
&1 \geq a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{2m}r_m\\
&\vdots\\
&1 \geq a_{n2}r_1 + a_{n2}r_2 + \ldots + a_{nm}r_m\\
&\sum_{i=1}^{i=m} r_i = \frac{1}{V}\\
&r_1, r_2, \ldots r_m \geq 0
\end{aligned}
$$

Aprovechando la relación inversa existente entre la sumatorias de los r y el valor del juego, V, podemos escribir una expresión de mayor simpleza y elegancia:

$$
\begin{aligned}
&\max(r_1 + r_2 + \ldots + r_m)\\
&\text{sujeto a:}\\
&a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \ldots + a_{1m}r_m \le 1\\
&a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \ldots + a_{2m}r_m \le 1\\
&\vdots\\
&a_{n1}r_1 + a_{n2}r_2 + \ldots + a_{nm}r_m \le 1\\
&r_1, r_2, \ldots r_m \ge 0
\end{aligned}
$$

Una vez resuelto este problema de Programación Lineal, se obtendrá m valores r_j. Si todos los valores r_j resultaron ser 0, ello demostraría que nuestra suposición de que el juego es ganado por A es incorrecta. Pero si al menos un valor r_j no es cero, entonces habremos llegado a la solución en valores r del juego. Adicionalmente, podemos dar el valor V del juego, que será positivo (ganado por A):

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=m} r_i}$$

Puede calcularse el valor de cada probabilidad q_j (probabilidades de decisión y acción de B) mediante la fórmula:

$$q_j = \frac{r_j}{\sum_{i=1}^{i=m} r_i}$$

Nótese que estos cálculos sólo tienen sentido si al menos un r_j es diferente de cero y si ninguno es infinito. En otros casos, el valor de V aparece como cero o infinito y las probabilidades q_j como indeterminadas. Veamos un ejemplo para valor V positivo:

	b1	b2	b3	b4
A1	2	5	4	3
A2	7	9	2	10
A3	11	6	3	2

En este juego B lleva las de perder. El resultado del juego será positivo. B y A van a minimizar su riesgo. Analizamos este juego con la herramienta Solver de Excel. El programa arroja un resultado válido, correspondiente a los siguientes r_j:

r_1	r_2	r_3	r_4
0.027355623	0	0.20668693	0.039513678

Surgen las siguientes probabilidades para la decisión-acción de B:

Q_1	q_2	q_3	q_4
10.00%	0.00%	75.56%	14.44%

El cuadro nos muestra que B siempre tenderá a usar la línea de acción 3 con un 75.56% de probabilidad, dando sólo 14.44% de peso a la acción 4, 10% a la acción 1 y ninguna probabilidad a la acción 2. El valor de este juego es 3.66.

La combinación de las acciones de A y B es la siguiente:

- A toma las acciones 1, 2 y 3 con probabilidades 76.67%, 11.11% y 12.22%.
- B toma las acciones 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 10%, 75.56% y 14.44%.

Ahora sabemos que la mayor probabilidad se concentra alrededor de la combinación (1,3). La pérdida mínima a la que llega B es 4. La gaancia máxima a la que llega A es 4. Este valor es cercano al que habíamos calculado, 3.66.

Nota importante sobre la formulación matricial del juego suma cero

Mediante estas formulaciones podemos hallar las probabilidades q_j asociadas a la decisión-acción de B. Mediante un planteamiento análogo, podemos encontrar las probabilidades p_j asociadas a la decisión-acción de A.

¡Muy importante! Debe notarse que la solución del juego no es determinística, sino estocástica. Esto se debe a que se ha generado conjuntos de probabilidades de decisión-acción para A y B. Tanto A como B deberán recurrir a un GNA sobre la base de los valores de probabilidad obtenidos para decidir la opción que cada uno tomará.

Otro ejemplo

Ahora veamos un juego diferente, en el cual B lleva las de ganar:

	b1	b2	b3	b4
A1	-2	-5	-4	-3
A2	-7	-9	-2	-10
A3	-11	-6	-3	-2

Al usar la premisa de que el valor del juego será positivo, Solver arroja valor infinitos para los r_j. Solver también indica que la solución no responde a una iteración convergente. Es una solución inservible. Este problema debe ser tratado bajo la premisa de que B gana el juego.

<u>Análisis bajo la premisa de que B gana el juego</u>

En el caso de que todos los r_j tomen valor cero o alguno tome valor infinito, ello significa que el supuesto de que el valor del juego V era positivo (ganado por A) era incorrecto. **Ahora supondremos que el valor del juego V es negativo** (ganado por B). Esto exige que el problema sea replanteado como su formulación refleja. En principio, debemos generar la matriz de valores α_{ij} de premios para B (castigos para A). Cada α_{ij}, será igual a:

$$\alpha_{ij} = -a_{ij}$$

Usaremos la transformación $\rho_j = -q_j/V$. Los ρ_j serán positivos en razón de que el signo menos neutraliza el carácter negativo de V. Las probabilidades q_j siempre tomarán valor positivo. Surge el siguiente problema, tan sobrio en forma como el anterior:

$$\begin{aligned}
&\min(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m)\\
&\text{sujeto a:}\\
&\alpha_{11}\rho_1 + \alpha_{12}\rho_2 + \ldots + \alpha_{1m}\rho_m \geq 1\\
&\alpha_{21}\rho_1 + \alpha_{22}\rho_2 + \ldots + \alpha_{2m}\rho_m \geq 1\\
&\vdots\\
&\alpha_{n1}\rho_1 + \alpha_{n2}\rho_2 + \ldots + \alpha_{nm}\rho_m \geq 1\\
&\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m \geq 0
\end{aligned}$$

Una vez resuelto el problema, tendremos una serie de valores ρ_j. Si todos los valores ρ_j resultaron ser 0, entonces nuestro supuesto de que el juego tomaba un valor V negativo era incorrecto. Pero si al menos uno de los valores ρ_j resultó ser diferente de cero, entonces ya hemos llegado a la solución en valores ρ de nuestro problema.

El valor V del juego, que será negativo (ganado por B) será:

$$V = -\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=m} \rho_i}$$

Puede calcularse el valor de cada probabilidad q_j (probabilidades de decisión y acción de B) mediante la fórmula:

$$q_j = \frac{\rho_j}{\sum_{i=1}^{i=m} \rho_i}$$

Veamos la formulación refleja del problema que no pudimos resolver. La matriz α_{ij} de premios para B es igual a:

	b1	b2	b3	b4
a1	2	5	4	3
a2	7	9	2	10
a3	11	6	3	2

Solver arroja los siguientes valores ρ:

P_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4

0	0.2	0	0

Los valores de las probabilidades de decisión-acción para B son:

q_1	q_2	q_3	q_4
0.00%	100.00%	0.00%	0.00%

El análisis muestra que B sólo se inclinará por una línea de acción. Este dato es importante para A. Ahora que A sabe que B tomará la opción 2 de todas formas, a A sólo le queda elegir el menor premio para B (correspondiente al menor castigo para A). A usará la opción 1. El valor de este juego es 5.

Matrices Notables de Juegos Suma No-Cero

En el juego de suma cero, lo que un jugador gana lo pierde otro. En un juego de suma no-cero, la ganancia de uno no está vinculada directa y matemáticamente a la pérdida de otro.

El Dilema del Prisionero

A y B son apresados por cometer un crimen. Si ninguno de los dos delata al compañero, el período de encarcelamiento se reduce en dos meses. Si uno delata al otro, su período de prisión se reduce en tres meses, y el de su compañero aumenta en tres meses, por no haber hablado. Si ambos delatan al compañero, sus períodos de encarcelamiento aumentan en dos meses (se reducen en –2 meses). La matriz correspondiente es la siguiente:

	B delata	B no delata
A delata	-2, -2	3, -3
A no delata	-3, 3	2, 2

¡Cobarde!

A y B realizan una carrera temeraria de autos, corriendo en forma directa y veloz hacia una pendiente. El primero que se retire, será considerado un cobarde. Si se retiran simultáneamente, no serán vistos como cobardes. Si los dos avanzan a alta velocidad, se accidentarán. Presentamos la matriz correspondiente:

	B se retira	B avanza
A se retira	1, 1	2, 0
A avanza	0, 2	-1, -1

Un caso de la competencia de dos firmas por un mercado

Dos firmas, A y B, deben decidir si entrarán en un mercado. Si sólo una lo hace, ésta gana un millón de dólares, y la otra no gana ni pierde. Si las dos lo hacen, cada una pierde un millón de dólares. Si ambas firmas deciden no entrar en el mercado, ninguna gana ni pierde nada. Veamos la matriz de pagos correspondiente:

	B entra	B no entra
A entra	-1, -1	1, 0
A no entra	0, 1	0, 0

La Guerra de los Sexos

Un hombre y una mujer deben decidir qué hacer el fin de semana. El hombre gusta de ir al cine, mientras que la mujer tiene afición por el teatro. Llega el día sábado, y cada uno deberá decidir dónde irá. Si el hombre va al cine y la mujer también lo hace, se encontrarán y pasarán buen tiempo juntos. Si el hombre va al teatro y la mujer también,

también pasarán un rato agradable en compañía. Naturalmente, si cada uno sigue sus propios deseos, el hombre irá al cine y la mujer al teatro. No se encontrarán, y disfrutarán del espectáculo sólo en forma limitada. Si, por el contrario, el hombre desea copiar la idea de la mujer y va a esperarla al teatro, mientras que la mujer decide esperar al hombre en el cine, tampoco se encontrarán. A continuación, mostramos la matriz de pagos correspondiente:

	Mujer elige Cine	Mujer elige Teatro
Hombre elige Cine	3, 2	1, 1
Hombre elige Teatro	1, 1	2, 3

Análisis Matricial y Equilibrio Nash

En el análisis matricial podemos identificar las situaciones que son equilibrio Nash. En el caso de la Guerra de los Sexos, hay dos equilibrios Nash. Recordemos cuál es nuetra matriz:

	Mujer elige Cine	Mujer elige Teatro
Hombre elige Cine	3, 2	1, 1
Hombre elige Teatro	1, 1	2, 3

Los puntos **Hc-Mc** y **Ht-Mt** son equilibrios Nash.

<u>El juego "¿Iguales o Distintas?" y la ausencia de estrategias puras para un equilibrio Nash</u>

No siempre una estrategia pura producirá un equilibrio Nash en un juego. Veamos el juego de "¿Iguales o Distintas?":

	B elige blanco	B elige negro
A elige blanco	1	-1
A elige negro	-1	1

En este caso, no existen equilibrios Nash obtenibles con estrategias puras. Sin embargo, puede realizarse un análisis probabilístico de minimización de riesgo. En tal caso, surgirían cuatro equilibrios Nash, que serían los puntos **Ab-Bb**, **An-Bb**, **Ab-Bn**, **An-Bn**. Todos los equilibrios Nash corresponderían al desarrollo de estrategias mixtas.

Análisis por Curvas de Reacción en el Duopolio de Cournot

El modelo matemático de duopolio de Augustine Cournot

Éste es un modelo de acciones y reacciones. Se trata de un juego secuencial. Luego de infinitos movimientos, se producirá un punto solución, es decir, una combinación de opciones de A y de B, así como los pagos que obtendrá cada jugador.

Sea un mercado de agua. El agua proviene de un manantial. Los derechos de explotación del manantial pertenecen a dos empresarios, A y B. El costo medio de producir una unidad de agua es cero. El costo marginal también es cero. Existe un mercado de agua, y la demanda de este mercado tiene la forma:

$$X = 1 - p$$

La cantidad máxima deseada de agua es 1 (puede ser un decámetro cúbico, por ejemplo). La siguiente expresión es equivalente:

$$p = 1 - X$$

Acción del monopolista

En un primer momento, el empresario A es un monopolista, y es el único que vende agua en el mercado. El ingreso monetario total de este empresario responde a la fórmula:

$$IN = p \cdot X_A$$
$$IN = (1 - X_A) \cdot X_A$$
$$IN = X_A - X_A^2$$

El ingreso marginal del empresario será $INMg = 1 - 2X_A$. Los pagos de cada productor son netos, y toman la forma de beneficios. La optimización de los beneficios de cada empresario se logrará cuando su ingreso marginal sea igual a su costo marginal. Para el caso de A:

$$1 - 2X_A = 0$$
$$X_A = \frac{1}{2}$$

La solución de un monopolio del agua nos dice que el empresario producirá solamente la mitad de la cantidad deseada total de agua. Cobrará un precio unitario de p = ½.

Reacción de la compañía rival

La empresa B observa que queda la mitad del mercado total por satisfacer. La demanda percibida por B es:

$$p = \frac{1}{2} - X_B$$

El cálculo de optimización llevará a B a igualar su ingreso marginal y su costo marginal. Dado que su ingreso total es:

$$IN = p \cdot X_B$$
$$IN = \left(\frac{1}{2} - X_B\right) \cdot X_B$$
$$IN = \frac{X_B}{2} - X_B^2$$

Entonces, su ingreso marginal será $INMg = \frac{1}{2} - 2X_B$. Al igualar ingreso marginal y costo marginal, tendrá:

$$\frac{1}{2} - 2X_B = 0$$
$$X_B = \frac{1}{4}$$

B cobrará un precio de $p = \frac{1}{4}$. Naturalmente, ya que este precio es inferior al que estableció A, éste deberá evaluar su situación. También deberá bajar su precio de venta a un nivel inferior a ¼.

Evaluación de la situación de A

Inicialmente, A vendía ½ de agua. Luego entró B a vender ¼ de agua, pero eso debe cambiar la estrategia de A, que ahora percibirá la siguiente demanda:

$$p = \frac{3}{4} - X_A$$

Como se ve, el movimiento de B cambió la visión estratégica de A. La nueva estrategia de A será ofrecer un X_A que respete la condición que mostramos a continuación.

$$\frac{3}{4} - 2X_A = 0$$
$$X_A = \frac{3}{8}$$

El nuevo precio de venta que puede establecer A es $p = \frac{3}{8}$.

Evaluación de la situación de B

Si A ofrece 3/8, entonces B percibe una demanda como:

$$p = \frac{5}{8} - X_B$$

El movimiento de A cambió la visión estratégica de B. La nueva estrategia de B será ofrecer un X_B que respete la condición:

$$\frac{5}{8} - 2X_B = 0$$

$$X_B = \frac{5}{16}$$

Su precio será $p = \frac{5}{16}$.

Las series de nivel de producción

En forma gradual, A reduce su oferta de agua al mercado. En forma gradual también, B incrementa su oferta de agua al mercado. La series de ofertas y precios de A son las siguientes:

$$S_A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \ldots \right\}$$

$$P_A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{11}{32}, \ldots \right\}$$

El término i-ésimo de la serie de ofertas de agua de A (que es igual al término i-ésimo de su serie de precios) es:

$$X_{Ai} = \frac{1}{2}\left(1 - 4^{-(i-1)}\left(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{i-2}\right)\right)$$

El límite de este serie cuando i tiende a infinito es mostrado a continuación.

$$X_{AL} = \frac{1}{3}$$

Pasa lo mismo con el precio:

$$p_{AL} = \frac{1}{3}$$

Las series de ofertas y precios de B son las siguientes:

$$S_B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \ldots\right\}$$
$$P_B = \left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, \frac{21}{64}, \ldots\right\}$$

El término i-ésimo de la serie de ofertas de agua de B (que es igual al término i-ésimo de su serie de precios) es:

$$X_{Bi} = 4^{-(i-1)}\left(1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{i-2}\right)$$

El límite de este serie cuando i tiende a infinito es:

$$X_{BL} = \frac{1}{3}$$

Pasa lo mismo con el precio:

$$p_{BL} = \frac{1}{3}$$

Construcción de las Curvas de Reacción

Este es un método de análisis muy usado en teoría de juegos. La aplicación de este método a nuestro problema de duopolio de Cournot considera que tanto a como B reaccionan frente a los movimientos del rival. Ocurren dos cosas:

- B siempre ofrece la mitad de las necesidades de agua no satisfechas por A
- A siempre ofrece la mitad de las necesidades de agua no satisfechas por B

Las curvas de reacción tomarán las formas siguientes:

$$X_B = \frac{1}{2}(1 - X_A)$$
$$X_A = \frac{1}{2}(1 - X_B)$$

Solución del juego

La intersección de ambas curvas de reacción es el punto solución de este mercado. La solución de este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$X_A^* = \frac{1}{3}$$

$$X_B^* = \frac{1}{3}$$

Puede verse que los movimientos de A y de B los conducen hacia una solución de mercado fatal e inevitable, que corresponde a la repartición del mercado en partes iguales, dejando una porción importante del mercado sin satisfacer, con la finalidad de proteger sus precios.

Equilibrio Nash y Curvas de Reacción: Una Aplicación a la Competencia de Precios

Analizaremos un mercado con dos empresas, 1 y 2, que venden productos rivales, ya que se trata de artículos sustitutos. La empresa 1 (productora de artículos 1) observa que la gente reacciona comprando más artículos 1 si sube el precio del artículo 2, y ve también que la gente compra menos artículos 1 cuando baja el precio del artículo 2. Por su parte, la empresa 2 (productora de artículos 2) observa que la gente reacciona comprando más artículos 2 si sube el precio del artículo 1, y ve también que la gente compra menos artículos 2 cuando baja el precio del artículo 1. La pregunta que surge es ¿qué sucederá con este mercado? ¿vencerá la empresa 1? ¿vencerá la empresa 2? ¿perderán las dos? ¿compartirán armónicamente el mercado? El análisis de Teoría de Juegos vía la técnica de las Curvas de Reacción nos mostrará un resultado muy probable de esta situación.

El mercado

La situación que nos interesa analizar puede ser formalizada de la siguiente forma:

$$X_1 = 1 - Ap_1 + Bp_2$$
$$X_2 = 1 - Ap_2 + Bp_1$$

Los precios de los artículos de la empresa rival tienen efecto negativo sobre las ventas de cada empresa.

Costos y beneficios

Sean los costos unitarios de producción de artículos w_1 y w_2 . Consideremos que los costos unitarios son iguales entre sí, y que tienen un valor w. Los beneficios unitarios serán:

$$benunit_1 = p_1 - w$$
$$benunit_2 = p_2 - w$$

Los beneficios totales serán:

$$bentotal_1 = (p_1 - w)(1 - Ap_1 + Bp_2)$$
$$bentotal_2 = (p_2 - w)(1 - Ap_2 + Bp_1)$$

Optimización de los beneficios

Calculando la segunda derivada de los beneficios totales respecto al precio de la propia empresa, vemos que su valor es negativo. Calculando la segunda derivada de los beneficios totales respecto al precio de la empresa alternativa, vemos que su valor es cero.

Todo lo anterior garantiza que puede obtenerse máximos beneficios mediante la aplicación del criterio de la primera derivada de valor nulo. Derivamos una vez los beneficios, y obtenemos el sistema de ecuaciones que mostramos a continuación.

$$\frac{\delta bentotal_1}{\delta p_1} = 1 + Aw + Bp_2 - 2Ap_1$$
$$\frac{\delta bentotal_2}{\delta p_2} = 1 + Aw + Bp_1 - 2Ap_2$$

El criterio de la primera derivada nula genera un sistema de dos ecuaciones simultáneas de dos incógnitas. Al resolver tal sistema, aparecen los precios que optimizan las decisiones de las empresas:

$$p_1 = p_2 = \frac{1 + Aw}{2A - B}$$

Las decisiones óptimas de precios determinan, pues, el siguiente punto:

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{1 + Aw}{2A - B}, \frac{1 + Aw}{2A - B} \right)$$

Este punto de precios es un equilibrio Nash: ninguno de los dos competidores deseará alterar su decisión respecto al precio

La situación óptima es un equilibrio Nash

En efecto, la situación óptima alcanzada en este ejemplo es un equilibrio Nash. Veamos por qué. El criterio de la primera derivada nula permite construir la siguiente expresión para el jugador 1:

$$p_1 = \frac{1 + Aw + Bp_2}{2A}$$

De manera que si el jugador 2 toma una decisión de precios como $p_2 = \pi_2$, entonces la decisión óptima de precios para la empresa 1 será:

$$p_{01} = \frac{1 + Aw + B\pi_2}{2A}$$

Para el jugador 2 puede construirse un criterio análogo.

$$p_{02} = \frac{1 + Bw + A\pi_1}{2B}$$

Si el jugador 1 sabe con total certeza que el jugador 2 va a decidirse por el precio π_2 , él no podrá cambiar su propia decisión de precio, ya que un precio mayor o menor a p_{01} le generaría beneficio menor al óptimo. De la misma forma, si el jugador 2 sabe con total certeza que el jugador 1 va a decidirse por el precio π_1 , él no podrá cambiar su propia decisión de precio, ya que un precio mayor o menor a p_{02} le generaría beneficio menor al óptimo.

Vemos que cada jugador ha visto que los precios establecidos por su rival según un criterio de máximas ganancias individuales determinan para él un único punto de precio de respuesta. Luego, el equilibrio alcanzado en este problema de competencia de precios es un equilibrio Nash.

Análisis del Dilema del Prisionero

Presentación del Dilema

El "Dilema del Prisionero" es el juego simultáneo de suma no-cero más notable. En este interesante caso, el dilema de cada uno de dos prisioneros consiste en no delatar a su compañero o delatarlo. La reducción del tiempo de encarcelamiento es un pago. Una reducción negativa corresponde al incremento de la pena de encarcelamiento. Los interrogadores se acercan a cada uno de los dos reos supuestamente implicados en un crimen realizado en conjunto. A cada reo se le dice lo siguiente:

> "el período de encarcelamiento preventivo es de tres meses, de manera que si podemos probar que tu compañero cometió el crimen y tú no, se te reducirá la pena en tres meses y saldrás libre al instante y a él se le incrementará la pena en tres meses, saliendo en seis meses. Pero si probamos que tú y tu compañero son criminales, el período de encarcelamiento será de cinco meses, incrementándose en dos meses (reduciéndose en menos dos meses). Finalmente, si no podemos probar que tú y tu compañero son culpables, la reducción de la pena será de dos meses, con lo que ambos deberán pasar un mes en la sombra, mientras se realiza una serie de trámites"

Un pago en este caso es el tiempo en que se reduce la pena. Los aumentos de pena son reducciones de signo negativo. La matriz de pagos correspondiente es la siguiente:

	B delata	B no delata
A delata	-2, -2	3, -3
A no delata	-3, 3	2, 2

¿Cuál será la solución de este juego? Se ve que si A y B cooperan, es decir que ninguno delata al otro, se obtiene reducción de la pena en dos meses para cada uno (resultado 2, 2). Si A desea salir al instante, puede tentar suerte con la reducción de tres meses, buscando el resultado 3, -3. Para ello, A deberá delatar. B puede tentar suerte con el resultado –3, 3, debiendo también delatar. Si A y B optan por la delación, en lugar de obtener la salida instantánea, se hacen ambos acreedores a un incremento de la pena de dos meses (es decir, reducciones de –2, -2).

Para resolver el problema será necesario analizar la posición de cualquier jugador (por ejemplo, A). A puede optar inicialmente por no delatar. Si B supusiera que A no lo va a delatar, concluirá que su reducción de pena será de dos meses o de tres meses. Bajo la hipótesis de que A no lo delatará, B se sentirá compelido a delatarlo, ya que de esa manera el resultado obtenido es máximo. El análisis que parte de la posición de B lleva a conclusiones paralelas en la estrategia de A. La búsqueda imperativa de la mejor posición final posible los lleva a optar por la estrategia de doble delación.

Reflexión sobre el Dilema del Prisionero

El Dilema del Prisionero podría ser calificado como “una paradoja de la búsqueda del bien individual”. En efecto, al buscar el bien individual máximo no obtenemos sino una gran pérdida. Al escoger entre “todos ganan” y “todos pierden”, y haciendo uso del criterio de “deseo ganar lo más posible”, obtenemos “todos pierden” como resultado.

Seguir la trayectoria de acciones que lleva a obtener máximo beneficio o mínima pérdida a nivel individual puede llevar a perder la oportunidad de obtener realmente el máximo beneficio individual. Los criterios del beneficio individual llevarán a veces a soluciones óptimas locales o incluso no óptimas, sin alcanzar soluciones óptimas globales. Los criterios del beneficio colectivo pueden a veces llevar a soluciones óptimas globales y colectivas.

Debemos preguntarnos ¿por qué abandonar los criterios individuales de optimización, si ellos son tan eficientes en los problemas individuales cotidianos? Respondemos a esa pregunta indicando que el conocimiento avanzado de las estructuras de los problemas individuales y colectivos indica que el criterio individual de optimización está subordinado a las especificaciones de los problemas individuales. Los problemas colectivos incluyen variables que alteran estructuralmente los problemas individuales. No puede haber discusión en lo siguiente: a veces convendrá resolver problemas individuales con criterios de optimización individual y a veces convendrá resolver esos mismos problemas con criterios de optimización colectiva.

Aparece el concepto de dilema social, es decir, una generalización del dilema cooperar-no cooperar expresado por el dilema del prisionero. Considérese el siguiente caso:

Debe atravesarse un viejo puente colgante de madera para alcanzar un edificio ritual que contiene un tesoro. El tesoro consiste en diez estatuillas de oro con incrustraciones de piedras preciosas. La primera está cuajada de diamantes, la segunda de esmeraldas, la tercera de amatistas, y así sucesivamente. La última posee incrustaciones de ámbar. Diez expedicionarios independientes y rivales se encontraron de casualidad a pocos metros del comienzo del puente. Éste aguanta sólo un poco más que el peso de una persona a la vez. Cada uno debe cruzar el puente de ida y de vuelta. Cada uno lleva una bolsa de cuero en la que sólo cabe una estatuilla. Se descarta el uso del azar para determinar quién va primero. Colocados en forma equidistante a la entrada del puente, nos preguntamos qué puede pasar. La búsqueda del bienestar individual puede llevar a que compitan por el paso al puente, trayéndolo abajo e impidiendo que ninguno de ellos obtuviera siquiera la menos rica de las estatuillas.

<u>El Problema de la Bandera Humana</u>

Ahora considérese el siguiente y famosísimo problema: En un pueblo cuyos habitantes son unos grandes entusiastas de las celebraciones patrióticas, se llama a mil jóvenes y se les invita a formar una bandera nacional humana. Deben ponerse camisas y sombreros de colores determinados, de manera que las combinaciones de los diversos trajes terminen formando zonas de colores vistosos según la forma de la bandera nacional, patrón que será sólo apreciable desde un lugar alto. Los jóvenes lo hacen, y las personas, incluidos sus amigos, que suben a los pisos superiores del edificio municipal, disfrutan del espectáculo. Al cabo de una hora, varios de los jóvenes sienten deseos de apreciar la colorida forma. Uno de ellos se escapa y, tras subir a la azotea del municipio, disfruta el espectáculo. Los otros espectadores no logran notar la ausencia del chico, pues la bandera no parece haberse alterado en lo absoluto. A los pocos minutos suben más jóvenes, pero no se ve que la bandera haya perdido su forma. Sin embargo, en muy poco tiempo el resto de los muchachos abandonará su puesto por el mismo motivo, resultando todo ello en una notoria deformación de la imagen.

Un análisis ético y económico del Dilema del Prisionero

Este dilema, que ofrezco tratar formalmente en forma posterior, se enfoca en el problema de un ladrón que ha sido hecho prisionero. El problema radica en que él tiene que decidir si confía o no confía en otro ladrón que es su socio. Y tiene que decidir si traiciona o no traiciona a su compañero. Las combinaciones de decisión y acción serían:

- Confía en su compañero y no lo delata.
- Confía en su compañero y lo delata.
- No confía en su compañero y lo delata.
- No confía en su compañero y no lo delata.

El primer y tercer comportamientos pueden ser vistos como "éticamente consistentes", mientras que el segundo comportamiento es "oportunista y abiertamente inmoral" y el último comportamiento es "puramente altruista". El socio tiene idéntica serie de combinaciones de decisión y acción.

El análisis situacional deberá estimar tres escenarios para cada socio: consistencia ética, oportunismo y altruismo. Con esto, tenemos que configurar un total de nueve escenarios morales posibles (ya que no sabemos con certidumbre cuál es la naturaleza de ninguno de los dos socios). A manera de ejercicio, veamos los nueve escenarios morales:

- El socio A (el primero) y el socio B (el segundo) son éticos (situación 1).
- A es ético y B es oportunista (situación 2).
- A es ético y B es altruista (situación 3).
- A es oportunista y B es ético (situación 4).
- A y B son oportunistas (situación 5).
- A es oportunista y B es altruista (situación 6).
- A es altruista y B es ético (situación 7).
- A es altruista y B es oportunista (situación 8).
- A y B son altruistas (situación 9).

El análisis situacional se ocupará de estudiar cada situación. Finalmente, sabremos cómo sería la distribución de los resultados finales de este juego.

El altruismo y el oportunismo reducen la posibilidad de variar la decisión. Un altruista simplemente no delatará, ya que no desea generar problemas a su socio. Un oportunista siempre delatará, ya que busca su beneficio sin consideración de los perjuicios para su socio. En la situación 9, bialtruista, la solución es "A no delata y B tampoco". En la situación 5, bioportunista, la solución es "A delata y B también". En cualquier situación en que haya un solo altruista o un solo oportunista, la solución dependerá del nivel de confianza del otro agente en su socio. Veamos las siguientes situaciones:

- A es ético y confía en B, que es oportunista. B delata a A.
- A es ético y no confía en B, que es oportunista. Ambos delatan.
- A es ético y confía en B, que es altruista. Nadie delata.
- A es ético y no confía en B, que es altruista. A delata a B.
- A es oportunista y B es ético y confía en A. A delata a B.
- A es oportunista y B es ético y no confía en A. Ambos delatan.
- A y B son oportunistas. Ambos delatan.
- A es oportunista y B es altruista. A delata a B.
- A es altruista y B es ético y confía en A. Nadie delata.
- A es altruista y B es ético y no confía en A. B delata a A.
- A es altruista y B es oportunista. B delata a A.
- A y B son altruistas. Nadie delata.

Se trata de doce situaciones posibles. Aún no hemos consiuderado la posibilidad de que los dos sean éticamente consistentes. Veamos qué siucedería si nuestros sujetos de estudio fuesen éticamente consistentes:

- A y B confían en su respectivo socio. Nadie delata.
- A confía en B, que no confía en A. B delata a A.
- A no confía en B, que sí confía en A. A delata a B.
- A no confía en B, que tampoco confía en A. Ambos delatan.

En el ajedrez no existe un resultado predecible desde el inicio del juego. Esto se debe a que se supone que los dos jugadores que intervienen tienen criterios altamente complejos, inanalizables por los modelos simples de la teoría de juegos. Pero veremos que la fatalidad o inminencia de un resultado sí se da en otros muchos juegos. Probaremos que puede darse inminencia en el caso que estamos estudiando del Dilema del Prisionero.

<u>Un observador externo realiza el análisis situacional</u>

Tenemos ahora dieciséis posibilidades para la situación final del juego. Si asignamos una calificación de un punto a cada situación y relacionamos tabulamos los posibles resultados, tenemos lo siguiente:

- Sólo A delata a B: 4 puntos sobre 16 = 25%.
- Sólo B delata a A: 4 puntos sobre 16 =) 25%.
- Nadie delata: 4 puntos sobre 16 = 25%.
- Ambos delatan: 4 puntos sobre 16 = 25%.

El complejo razonamiento nos ha llevado a encontrar que se producen cuatro situaciones posibles para el final del juego. Cada una tiene una probabilidad de 25% de producirse. Claro está que hemos supuesto que las características morales se distribuían en forma uniforme (33.33% para cada característica) y que la confianza de un agente ético respecto del otro era del 50%. En este caso, no se produce inminencia o fatalidad.

Si las probabilidades de que cada uno fuera ético, altruista u oportunista se hicieran 70%, 20% y 10%, se habría de obtener la siguiente distribución:

- Sólo A delata a B: 4 puntos sobre 16 = 24.75%.
- Sólo B delata a A: 4 puntos sobre 16 = 24.75%.
- Nadie delata: 4 puntos sobre 16 = 20.25%.
- Ambos delatan: 4 puntos sobre 16 = 30.25%.

Lo que indicaría que el resultado más probable del juego en este caso sería la doble delación. Ahora vemos que la delación es un resultado fatal. Si diez mil parejas distintas enfrentaran este Dilema del Prisionero, y los agentes involucrados tuviesen las mismas distribuciones éticas, tendríamos 3025 situaciones de doble delación, frente a sólo 2025 situaciones de no delación.

<u>Uno de los dos jugadores realiza el análisis situacional</u>

Ahora procedamos a lo siguiente: suponga que usted es uno de los dos prisioneros, por lo que sabe a ciencia cierta cuál es su naturaleza ética y cuál es su confianza en la otra persona. Es decir, es usted o bien ético, o bien oportunista o bien altruista; usted o bien confía o bien no confía. Para el caso, usted es ético y probará a confiar en su socio. Si la distribución ética de su socio es 70-20-10, surgirán los siguientes resultados:

- El socio lo delata con probabilidad de 55%.
- Nadie delata a nadie con probabilidad de 45%.
- Sólo usted delata: imposible.
- Ambos delatan: imposible.

Con tal distribución de probabilidades, seguramente usted probará a no confiar en el socio. Sucederá lo siguiente:

- Sólo usted lo delata con probabilidad de 45%.
- Ambos son delatores con probabilidad de 55%.
- Sólo él delata: imposible.
- Nadie delata: imposible.

Si ve usted un beneficio en ser el único delator y un perjuicio en que ambos sean delatores, este análisis le muestra que hay once probabilidades de cada veinte de que usted salga perjudicado. Como puede verse, el resultado se producirá con gran probabilidad, dado que sus decisiones y acciones se *enganchan* con las de su compañero, produciendo situaciones finales altamente probables, que son inminentes o fatales, ya que usted no podrá huir fácilmente de ellas, ya que tienden a existir, muy a pesar de lo que usted desee evitar que ellas surjan. Teniendo tal socio, usted deberá enfrentar ahora la fatalidad, ya que lo más probable es que salga perjudicado en la situación actual. Cada conjunto de probabilidades ofrecerá diferentes distribuciones para la solución. Usted puede realizar los cómputos con una hoja de cálculo.