

1 Gravitación y Cosmología

1.1 Teoría de Newton de la Gravitación Universal

1.1.1 Fuerza Gravitatoria, Campo gravitatorio y Potencial Gravitatorio.

La teoría de Newton de la gravitación universal propone la conocida expresión para la **fuerza gravitatoria** entre dos masas:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r \quad (1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, que vale $6.67259(85) \cdot 10^{-11}$ N m² / kg².

Esta expresión también puede interpretando diciendo que una masa M genera a su alrededor un **campo gravitatorio** $\vec{g}(\vec{r})$, que depende de la distancia a la masa M , dado por la expresión

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r \quad (2)$$

de tal forma que cualquier masa m que se encuentre en el campo gravitatorio sufre una fuerza

$$\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r}) \quad (3)$$

El campo gravitatorio puede obtenerse conocido el **potencial gravitatorio** $\Phi(\vec{r})$, que, para una masa M viene dado por

$$\Phi(r) = -G \frac{M}{r} \quad (4)$$

En este caso, el campo gravitatorio se obtiene como la derivada radial del potencial.

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{d\Phi(r)}{dr} \vec{u}_r \quad (5)$$

1.1.2 Masa inercial y masa gravitatoria. Aceleración en un campo gravitatorio.

En las expresiones de la física clásica, la masa aparece en dos expresiones de significado muy diferente. Por un lado, tenemos la ley fundamental de la

dinámica $\vec{F} = m\vec{a}$. En este caso la masa tiene el significado de la propiedad de los cuerpos que nos dice cuánto se opone un cuerpo a cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme. Esta masa (la que corresponde al cociente entre la fuerza y la aceleración) se denomina **masa inercial**.

Por otro lado, la masa también aparece en las expresiones de la fuerza gravitatoria $\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$. En este caso, la masa tiene el significado de la propiedad de los cuerpos que nos dice cómo de intensa es la fuerza en un campo gravitatorio dado, y no tiene nada que ver con el estado de movimiento del sistema. Esta masa se denomina **masa gravitatoria**.

El hecho que la masa inercial y la masa gravitatoria coincidan debe considerarse como un hecho empírico, fortuito, dentro de la mecánica clásica. Esto provoca que, a partir de $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}(\vec{r})$, pueda deducirse que, para cualquier objeto que se mueve en un campo gravitatorio, se cumple que su aceleración $a = g(\vec{r})$, es la misma y coincide con el campo gravitatorio.

El movimiento de los cuerpos en un campo gravitatorio, en la teoría de Newton de la gravitación, se obtienen integrando las ecuaciones de movimiento a partir de que la aceleración sea igual al campo gravitatorio

1.1.3 Éxitos de la teoría de Newton. Descubrimiento de Neptuno.

La teoría de Newton describe plenamente el movimiento de los planetas, satélites artificiales, etc. El éxito más llamativo de la teoría de Newton fue el descubrimiento del planeta Neptuno. Esto ocurrió porque en una descripción muy detallada de la órbita de Urano, se encontraron pequeñas desviaciones con respecto a las predicciones de las leyes de Newton, que consideraban la atracción del sol y de los planetas conocidos sobre Urano. Asumiendo que las leyes de Newton eran válidas, se postuló que debería existir otro planeta exterior a Urano, y se predijo su posición. Poco después fue descubierto.

1.1.4 Problemas conceptuales: Igualdad de las masas inercial y gravitatoria. Interacción a distancia.

La teoría de Newton de la gravitación tiene dos problemas conceptuales importantes:

Igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria. Como hemos mencionado anteriormente, en la teoría de Newton, dos propiedades muy

diferentes de los objetos materiales (resistencia al cambio de velocidad, y respuesta a un campo gravitatorio) vienen determinados por una misma magnitud, que es la masa. Esta igualdad debe provenir de alguna propiedad más profunda, que no explica la teoría de Newton.

Interacción a distancia. Las expresiones de la teoría de Newton implican que, en principio, sería posible, moviendo un objeto pesado, modificar instantáneamente el campo gravitatorio en regiones lejanas del espacio. Esto no es compatible con la relatividad especial.

1.2 Teoría de Einstein de la Relatividad General

1.2.1 Principio de equivalencia.

No hay ningún experimento que pueda realizarse en una región pequeña del espacio que pueda distinguir entre un campo gravitatorio y un sistema en movimiento acelerado

Nótese que en un campo gravitatorio, todos los objetos se observan moviéndose con una aceleración $\vec{a} = \vec{g}(\vec{r})$. Si la zona del espacio es suficientemente pequeña para que $\vec{g}(\vec{r})$ sea la misma en todos los puntos, el movimiento de los objetos sería el mismo que el que se observaría en un sistema en movimiento acelerado con una aceleración $\vec{a} = \vec{g}(\vec{r})$ con respecto a un sistema inercial.

1.2.2 Movimiento en un sistema inercial. Intervalo. Tensor métrico.

Vamos a describir el movimiento de objetos libres (no sometidos a fuerzas externas) en un sistema inercial. A priori, sabemos que ese movimiento es uniforme, con velocidad constante, pero vamos a derivar una expresión que sea compatible con la relatividad especial.

Cuando un objeto pasa de una posición inicial en el espacio-tiempo dada por (x_i, y_i, z_i, t_i) a una posición final (x_f, y_f, z_f, t_f) , a lo largo de una trayectoria determinada, podemos definir el **intervalo** $S_{i,f}$ a través de la expresión:

$$S_{i,f} = \int_i^f ds \tag{6}$$

donde la expresión ds , denominada **elemento de intervalo**, viene dada por

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \tag{7}$$

La definición de intervalo es invariante frente a transformaciones de Lorentz: aunque las coordenadas (x, y, z, t) y sus diferenciales (dx, dy, dz, dt) cambien como resultado de las transformaciones de Lorentz, el elemento de intervalo no se modifica. La luz se mueve de tal forma que $ds = 0$.

Una forma conveniente de escribir el elemento de intervalo es la siguiente:

$$(ds)^2 = (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (8)$$

La matriz 4×4 que aparece en esta expresión se denomina el **Tensor métrico**. Su significado es que da el valor del elemento de intervalo a partir de los diferenciales de las coordenadas y del tiempo. El tensor métrico toma la forma de la expresión anterior para todos los sistemas inerciales.

1.2.3 Movimiento en un sistema no inercial. Tensor métrico. Geodésicas

Un sistema no inercial se obtiene a partir de un sistema inercial haciendo una transformación de coordenadas que no sea lineal. Por ejemplo, la transformación

$$\begin{aligned} x' &= x - 1/2at^2 \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

pasaría de un sistema inercial (x', y', z', t') a otro sistema no inercial en movimiento uniformemente acelerado (x, y, z, t) . La expresión del elemento de intervalo, que en el sistema inercial sería

$$(ds)^2 = (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 \quad (9)$$

pasaría a ser, en las coordenadas del sistema no inercial,

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx + atdt)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (10)$$

ya que $dx' = dx + atdt$.

De esta forma, para un sistema no inercial arbitrario, la expresión del elemento de intervalo, dada por eq. (8) para el sistema inercial, pasaría en general a venir dada por la expresión

$$(ds)^2 = (cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde el tensor métrico viene determinado por una matriz simétrica cuyos elementos g_{ij} dependen, en general, de las coordenadas y del tiempo.

Se dice, en este contexto, que los elementos del tensor métrico determinan la “curvatura” del espacio-tiempo. Para sistemas de referencia inerciales, el tensor métrico viene dado por la expresión (8), y el espacio-tiempo es plano. Para sistemas de referencia no inerciales, el tensor métrico viene dado por la expresión (11), y el espacio-tiempo es curvo.

Al igual que en un sistema de referencia inercial, las trayectorias son aquellas que hacen mínimo el intervalo. No obstante, en un sistema no inercial, estas trayectorias, que se denominan **Geodésicas**, no corresponden a líneas rectas con velocidad uniforme.

Las trayectorias que describen el movimiento de los objetos libres, tanto para sistemas inerciales como no inerciales, y las trayectorias que describen el movimiento de los objetos en campos gravitatorios, en la teoría de Einstein de la Relatividad general, son aquellas que hacen mínimo el intervalo.

1.2.4 Ecuaciones de la relatividad general. Solución de Schwarzschild. Relación con la gravitación de Newton.

El trabajo de Einstein en el desarrollo de la teoría de la relatividad general consistió en determinar el tensor métrico que corresponde a un campo gravitatorio determinado, de forma plenamente consistente con la relatividad especial. Las ecuaciones de Einstein toman la forma siguiente:

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (12)$$

En esta expresión, R_{ij} , llamado Tensor de Ricci, está relacionado con las derivadas con respecto a las coordenadas y el tiempo del tensor métrico g_{ij} .

T_{ij} es el tensor densidad de energía-momento. En concreto, el término T_{00} corresponde a la densidad de energía, que es igual a la densidad de materia dividida por c^2 (recordad que $E = mc^2$).

La interpretación de esta ecuación es que si se conocen las masas que generan el campo, y la forma en la que se mueven (el tensor T_{ij}), pueden determinarse las componentes del tensor métrico g_{ij} , que determinan la curvatura del espacio-tiempo.

Conocido el tensor métrico, pueden obtenerse las geodésicas, que nos dicen cómo se mueven los objetos en este campo gravitatorio.

Las ecuaciones de Einstein nos permiten calcular el tensor métrico, que describe la curvatura del espacio-tiempo, a partir de las masas y las velocidades de los cuerpos

Las ecuaciones de Einstein fueron resueltas para el caso de que se tuviera una masa M fija en el origen de coordenadas. Esta solución se denomina **Solución de Schwarzschild**. Este problema tiene simetría esférica, por lo que es más conveniente utilizar coordenadas polares (r, θ, ϕ) en lugar de (x, y, z) . La expresión del elemento de intervalo viene dada por

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)(cdt)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (13)$$

A partir de esta expresión, se obtienen las trayectorias correspondientes a una partícula en movimiento en un campo central. Se obtiene que estas soluciones coinciden con las de la gravitación de Newton cuando se dan las condiciones siguientes:

- a) La velocidad es muy inferior a la de la luz.
- b) El potencial gravitatorio GM/r es muy pequeño comparado con $c^2/2$.

1.2.5 Interpretación del movimiento en la teoría de Newton y la de Einstein.

En la teoría de Newton de la gravitación, existe una cada masa ejerce una fuerza sobre las vecinas. Esa fuerza hace que las trayectorias se desvíen de las líneas rectas con velocidad uniforme.

En la Teoría de Einstein, la presencia de una masa produce una curvatura del espacio tiempo (modifica el tensor métrico). Las trayectorias de

las partículas son geodésicas, que corresponden a un intervalo mínimo. Las geodésicas son, en un espacio-tiempo curvo, el equivalente a las líneas rectas en un espacio tiempo plano.

1.2.6 Pruebas experimentales de la relatividad general. Curvatura de la luz.

Curvatura de la luz. La relatividad general predice que la luz debe curvarse en las proximidades de objetos muy masivos. Para comprobar este hecho, se estudió el cambio de la posición aparente de las estrellas que estaban en la proximidad del sol, durante un eclipse. En este experimento, realizado en 1919, se encontraron desviaciones de 1.98 ± 0.18 y de 1.69 ± 0.45 segundos de arco, en pleno acuerdo con la predicción de la relatividad general que era de 1.74 segundos de arco.

Precesión del perihelio de mercurio. Si la teoría de Newton fuera estrictamente cierta, el movimiento de los planetas en torno al sol correspondería a elipses perfectas, con una orientación fija. Ello haría que el perihelio de la órbita permaneciera fijo. No obstante, las desviaciones debidas a la relatividad general hacen que el perihelio cambie, especialmente donde los potenciales gravitatorios son más intensos. Ello ocurre en la órbita de Mercurio, que es el planeta más próximo al sol. La predicción de la relatividad general es que el perihelio precesiona, a razón de 43.0 segundos de arco por siglo. Ello está en pleno acuerdo con las medidas experimentales, de las que se obtiene que la precesión (restando el efecto de otros planetas) es de 43.1 ± 0.5 segundos de arco por siglo.

1.2.7 Agujeros negros.

Una de las consecuencias de la teoría de Einstein de la gravitación es que cuando una masa M se concentra dentro de una distancia igual o menor a $r_s = 2GM/c^2$ (denominado **radio de Schwarzschild**), la curvatura del espacio tiempo es tal que la zona del espacio con $r \leq r_s$ es inaccesible al exterior. La formación de agujeros negros exige que masas muy grandes estén concentradas en distancias muy pequeñas. Por ejemplo, para que el sol ($M = 1.9889 \cdot 10^{30}$ kg) constituyera un agujero negro, su masa debería estar concentrada en 2.95 km.

Dilatación gravitatoria del tiempo Cuando se observan sucesos que ocurren en las proximidades de un agujero negro, o en un campo gravitatorio muy intenso, se encuentra que el tiempo transcurre más lentamente para un observador exterior, comparado con el tiempo propio que mediría un observador situado en el campo gravitatorio intenso.

$$t_{\text{fuera}} = t_{\text{propio}}(1 - r_s/r)^{-1/2} \quad (14)$$

Contracción gravitatoria de las longitudes Cerca de un agujero negro, las distancias radiales (hacia el agujero negro) son mucho más cortas para el observador externo que las longitudes propias.

$$L_{\text{fuera}} = L_{\text{propio}}(1 - r_s/r)^{1/2} \quad (15)$$

Observación de agujeros negros Existen objetos celestes muy densos que son candidatos para ser agujeros negros. Lo característico de estos objetos es que no son “negros”, sino que emiten radiación de alta energía (rayos X y rayos gamma) que provienen de la materia que se acumula en la vecindad del agujero para $r > r_s$, formando un plasma muy denso. También curvan mucho la luz que llega a su alrededor.

1.3 Cosmología

1.3.1 Cómo es el universo. Expansión del universo. Constante de Hubble.

Cuando observamos el universo a gran escala (distancias muy superiores a la separación entre galaxias próximas), encontramos que el universo aparece como **homogéneo** (la misma densidad de materia en todos los puntos) e **isótropo** (las mismas propiedades en todas las direcciones).

Las ecuaciones de la relatividad general pueden aplicarse al universo como un todo. Cuando Einstein aplicó sus ecuaciones, encontró que no era posible encontrar soluciones estacionarias, en las que las propiedades del universo no variaran con el tiempo. Por ello, Einstein modificó sus ecuaciones introduciendo la constante cosmológica Λ :

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} + \Lambda g_{ij} \quad (16)$$

De esta forma, Einstein obtuvo un universo que era estacionario (no variaba con el tiempo), era finito aunque ilimitado, similar a la superficie de una esfera. Este universo tenía curvatura positiva, de forma que en el la suma de los ángulos de un triángulo era ligeramente superior a 180 grados.

No obstante, Hubble encontró, observando el corrimiento al rojo de las galaxias lejanas, que **el universo está en expansión**. Cuanto más lejanas están las galaxias de nosotros, se alejan a mayor velocidad. La **ley de Hubble** puede expresarse como

$$v = H_0 d \quad , H_0 = 70 \pm 10 \text{ km/s/Mpc} \quad , 1 \text{ Mpc} = 3.26 \cdot 10^6 \text{ años-luz} \quad (17)$$

Por ejemplo, una galaxia que se esté a una distancia de nosotros de 100 Mpc, se alejará a unos 7000 km/s. Por tanto, el universo no era estacionario como pensaba Einstein.

1.3.2 Origen del universo. El Big Bang. Radiación de fondo del universo.

Las ecuaciones de Einstein, sin la constante cosmológica, permitían tres tipos de soluciones, denominadas soluciones de Friedmann, y todas ellas eran compatibles con la expansión del universo. Por tanto, se abandonó la constante cosmológica, y el propio Einstein llegó a decir que fue su mayor error, pues de no haberla introducido podría haber predicho la expansión del universo.

Estos modelos cosmológicos predecían que, en un pasado remoto, toda la materia que forma el universo estaría concentrada en un estado de densidad y temperatura muy altas, que se expandía y se enfriaba rápidamente. Esta situación (materia muy densa, muy caliente en expansión) es lo que se denomina el **“Big Bang”**. El tiempo en el que esto ocurrió puede estimarse como la inversa de la constante de Hubble, que es, aproximadamente, la edad que tiene nuestro universo.

$$T = 1/H_0 = 14 \cdot 10^9 \text{ años} \quad (18)$$

Tras el **“Big Bang”**, la materia estaba demasiado caliente, de manera que los electrones estaban separados de los núcleos atómicos, y absorbían y emitían luz (radiación) continuamente, con lo cual la radiación estaba en equilibrio térmico con la materia. No obstante, unos 300.000 años después del **“Big Bang”**, cuando la temperatura era de unos 3000 K, los electrones y los núcleos forman átomos neutros, y la absorción y emisión de radiación se

hace mucho menor. Esta radiación que llena todo el universo, ha sufrido la expansión de todo el universo, y ha llegado hasta nuestros días convertida en la radiación de fondo, que corresponde con gran exactitud a la que emitiría un cuerpo negro de temperatura $T=2.7828$ K.

La existencia de la radiación de fondo de las microondas es la prueba más firme de la existencia del “Big Bang”.

1.3.3 Geometría del Universo. Densidad crítica. Materia oscura. Futuro del universo.

Las soluciones de Friedmann para el universo (sin constante cosmológica) son de tres tipos, en función de la geometría.

Geometría Esférica: Corresponde a un universo análogo al propuesto por Einstein (finito e ilimitado, aunque no estacionario), con curvatura positiva, parecido a una superficie esférica. En él, si se traza un triángulo muy grande, la suma de los ángulos es mayor que 180° . Este universo tendría una extensión finita, aunque no tendría límites, y contendría una cantidad finita de materia.

Geometría Plana: Corresponde a un universo euclídeo, con curvatura nula. En él, si se traza un triángulo muy grande, la suma de los ángulos es igual a 180° . Este universo tendría una extensión infinita, y contendría una cantidad infinita de materia.

Geometría Hiperbólica: Corresponde a un universo con curvatura negativa, parecido a la superficie de una silla de montar. En él, si se traza un triángulo muy grande, la suma de los ángulos es menor que 180° . Este universo tendría una extensión infinita, y contendría una cantidad finita de materia.

La geometría del universo viene determinada (si no hay constante cosmológica), por el valor de la densidad de materia. Hay una **densidad crítica**, que depende de la constante de Hubble, que hace que la geometría del universo sea plana. Si la densidad es superior a la crítica, la geometría es esférica y si es inferior, es hiperbólica.

Se considera que nuestro universo debe corresponder, con buena aproximación, a la geometría plana, ya que si hoy en día existiera una pequeña curvatura positiva o negativa, en el “Big Bang” dicha curvatura habría de ser

varios órdenes de magnitud menor. Para ello, la densidad de materia debe ser igual a la densidad crítica. No obstante, todos los estudios indican que la materia normal, que constituye estrellas y planetas, sólo corresponde a un pequeño porcentaje de la densidad crítica. El resto de la densidad de materia corresponde a la denominada **materia oscura**, formada por partículas aún por descubrir, que daría cuenta de la densidad de materia necesaria para alcanzar la densidad crítica.

En cuanto al **futuro del universo**, se encuentra que si la densidad fuera superior a la densidad crítica (geometría esférica) el universo frenaría su expansión y volvería a colapsar de nuevo en un estado de alta densidad y temperatura (“big crunch”). En los otros dos casos, el universo seguiría expandiéndose indefinidamente. En la geometría plana, la expansión (medida por la constante de Hubble) sería cada vez más lenta, mientras que en la geometría hiperbólica se alcanzaría un valor constante para tasa de expansión.

1.4 Cuestiones

1. Explica la teoría de Newton de la gravitación.
2. Explica la diferencia entre masa inercial y masa gravitatoria.
3. Explica el principio de equivalencia de Einstein.
4. Qué es el intervalo entre dos sucesos. Qué es el tensor métrico. Qué diferencia hay entre el tensor métrico en un sistema inercial y en uno no inercial.
5. Qué son las geodésicas. Cómo puede describirse el movimiento de una partícula libre en un sistema no inercial.
6. Cómo son las ecuaciones de Einstein de la relatividad general. Qué magnitudes relacionan.
7. Qué evidencias experimentales existen sobre la relatividad general.
8. Qué diferencias existen entre la descripción de Newton y de Einstein del movimiento en un campo gravitatorio.
9. Qué es un agujero negro. Cómo es el tensor métrico en las proximidades de un agujero negro.

10. Qué es el corrimiento al rojo de las galaxias. Cómo se interpreta.
11. Qué es la constante de Hubble. Qué valor (aproximado) tiene. Cómo puede calcularse la edad del universo a partir de esa constante.
12. En qué consiste la teoría del “Big Bang”. Qué pruebas avalan dicha teoría.
13. Qué geometrías son posibles para nuestro universo. Cómo dependen dichas geometrías de la densidad de materia.
14. Cómo evolucionará nuestro universo en el futuro.

1.5 Material complementario

- Vídeos

1. “Un telescopio en el espacio”
2. “Desde Kepler a Einstein”
3. “La armonía del universo”
4. “Más allá del universo mecánico”
5. “El universo mecánico cuántico”