Relatividad

1. Conceptos básicos y relatividad de Galileo.

1.1. Sistema de referencia.

Para estudiar cualquier fenómeno físico se emplean *sistemas de referencia* que son entes a los cuales nos referimos cuando queremos distinguir la situación en el espacio y el tiempo de dos sucesos cualesquiera. En física se suelen utilizar sistemas de referencia cartesianos, que constan de un *origen*, y tres *ejes* perpendiculares. La situación del origen y la dirección de los ejes es arbitraria. El tiempo también tiene un origen de referencia, que puede tomarse arbitrariamente. En los paises cristianos, para determinar la fecha se toma como referencia el nacimiento de Cristo, mientras que en los países musulmanes se toma la Hégira.

Ejemplos como los anteriores, nos llevan a decir que todos los sistemas de referencia son sólo fruto de convenios entre personas.

1.2. Principio de relatividad.

La visión del mundo clásico desde la cuál se explicaba un gran número de fenómenos físicos, tuvo su origen en Galileo. Hasta entonces, se consideraba que el espacio y el tiempo son absolutos, y por tanto debe existir un sistema de referencia privilegiado (aquél que está en reposo con respecto a la tierra) en el que el origen y los ejes estan en reposo absolutos. La experiencia nos dice lo contrario. En el ejemplo de un conductor de coche que circula por la carretera, queda de manifiesto que aunque para un pasajero del mismo coche, el conductor está quieto, para una persona sentada en una parada de autobus, el conductor no esta quieto. El ejemplo se puede ampliar involucrando a los cuerpos celestes.

Con esto se quiere decir que, en principio:

> No existen puntos absolutamente fijos en el universo, de modo que todos los movimientos reales son relativos.

El principio de relatividad, formulado inicialmente por Galileo, establece que

> las leyes de la Física son idénticas para dos observadores que se desplacen uno con respecto a otro con movimiento rectilíneo y uniforme, es decir, con velocidad constante.

De todos los sistemas de referencia. son especialmente relevantes los sistemas *inerciales.* En estos sistemas, un cuerpo que no está sometido a fuerzas está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (es decir, con velocidad constante). Los sistemas de referencia *inerciales* se mueven con velocidad constante unos con respecto a otros. Las leyes de la física (conservación del momento, conservación de la energía, etc) se formulan de una forma sencilla en sistemas inerciales. Si los sistemas son no-inerciales, hay que introducir unas fuerzas adicionales llamadas fuerzas de inercia.

1.3. Transformaciones de Galileo.

Supongamos dos sistemas de referencia S y S'. El segundo se mueve con respecto al primero con velocidad constante $\vec{u}$.

Se observa que las coordenadas de un punto P con respecto al sistema S, dadas por el vector $\vec{r}$ están relacionadas con las coordenadas de P con respecto al sistema S', dadas por el vector $\vec{r'}$, a través de la expresión

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}t$$

que es la expresión vectorial de las ecuaciones que junto con la hipótesis del Tiempo Absoluto

$$t' = t$$

constituyen las **ecuaciones de transformación de Galileo**. La hipótesis del tiempo absoluto dice que

> el tiempo transcurre de la misma manera en dos sistemas de referncia cualquiera.

Si suponemos el ejemplo de la figura anterior, pero S' moviéndose con dirección paralela al eje x, las ecuaciones de transformación sera:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

en forma paramétrica.

Pero retomando la expresión vectorial, $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}t$, si derivamos respecto a t tendremos la velocidad $v(t)$.

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{u}$$

Si derivamos la velocidad respecto al tiempo tendremos la aceleración:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

1.4. Invariancia de las leyes de la física frente a las transformacines de Galileo.

La última igualdad, $\vec{a}' = \vec{a}$, nos permite demostrar inmediatamente la invariancia de la segunda ley de Newton ante una transformación de Galileo. En efecto, para el sistema S, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, y para el sistema S', $\vec{F}' = m\vec{a}'$. Entonces $\vec{F} = \vec{F}'$ suponiendo que m es la misma sea cual sea la velocidad. Es decir, la masa es invariante frente a las transformaciones de Galileo.

SR		SR'	
Antes	Después	Antes	Después
$m+m$	$2m$	$m+m$	$2m$

Otra ley de la física que es invariante frente a las transformaciones de Galileo es la conservación del momento lineal. Si en una colisión de dos partículas de masa m se conserva el momento lineal cuando se observa la colisión desde el sistema S, también se conservará desde cuando se observa desde el sistema S'.

S		S'	
Antes	Después	Antes	Después
$m \cdot v + m(-v)$	$2m \cdot 0$	$m \cdot 0 + m(-2v)$	$2m(-v)$

Por último cabe destacar la invariancia de la ley de la conservación de la energía frente a una transformación de Galileo. Por ejemplo, en una colisión inelástica en la que la energía cinética de las partículas que colisionan se convierte en energía interna Q se tiene, visto desde dos sistemas de referencia,

SR		SR'	
Antes	Después	Antes	Después
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$ $\downarrow$ mv^2	$0 + Q$ $\downarrow$ Q	$0 + \frac{1}{2}m(2v)^2$ $\downarrow$ mv^2	$\frac{1}{2}mv^2 + Q$ $\downarrow$ Q

2. Problemas de las transformacionde de Galileo.

Como se ha dicho en apartados anteriores, las ecuaciones de transformación de Galileo dejan invariantes las leyes de la física referido a sistemas en movimiento uniforme. No era necesario definir un sistema de referencia absoluto al cuál referir el resto de movimientos.

En el siglo XIX se creyó encontrar ese sistema en lo que se denominó como *éter*. Este éter se definió como una sustancia que ocupa todo el Universo y que fluye libremente a través de todos los cuerpos materiales que se mueven en su seno, cuya función es la de servir como soporte para la propagación de la luz (ondas electromagnéticas) en su seno

El primer problema en la definición del éter era que este tenía la propiedad de ser permeable para que los cuerpos se moviesen en su seno sin percibir el medio, y por otra parte ser rígido para que la velocidad de propagación de la luz fuese casi instantánea. Al margen de esta observación, lo primero que se intentó fue detectar la presencia del éter. El primero en crear una experiencia para su detección fue A. A. Michelson.

2.1. Experimento de Michelson-Morley.

La experiencia de Michelson-Morley y sus consecuencias se explican en el vídeo correspondiente.

Destacamos, sin embargo, que el 'fracaso' en la experiencia al no detectar la existencia del éter, llevó al reajuste de los conceptos de espacio y tiempo, cambiando así fundamentos importantes de la Física. La primera consecuencia importante es que la velocidad de la luz es independiente del movimiento de la Tierra.

2.2. Ecuaciones de Maxwell.

Otro hecho importante fue probar que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes ante transformaciones de Galileo.

Las ecuaciones de Maxwell dicen cómo varía el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$ en función de las cargas que los producen.

El campo eléctrico y el campo magnético dependen del sistema de referencia. La forma en la que varían debe ser consistente con que la fuerza que producen sobre una carga (la fuerza de Lorentz) no dependa del sistema de referencia. En efecto, como la fuerza de Lorentz es $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, veamos que ocurre al comparar estas fuerzas en dos sistemas A y B donde B se mueve con respecto a A con velocidad $\vec{u}$.

- Para A: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$
- Para B: $\vec{F'} = q(\vec{E'} + \vec{v'} \wedge \vec{B'}) = q(\vec{E'} + (\vec{v} - \vec{u}) \wedge \vec{B})$

Como $\vec{F} = \vec{F'}$ entonces ha de ser:

- $\vec{E} = \vec{E'} - \vec{u} \wedge \vec{B}$
- $\vec{B} = \vec{B'}$

Si se introducen estas igualdades en las ecuaciones de Maxwell, estas no quedan invariantes.

3. Relatividad Especial de Einstein.

Para solucionar estos problemas, Einstein rederiva las leyes de la física partieno de dos postulados:

> Las leyes de la física son las mismas en todo sistema de referencia inercial.

Esto es simplemente reafirmar el principio de Relatividad de Galileo.

> La velocidad de la luz c es la misma uando se mide en cualquier sistema de referencia inercial

A partir de estos dos postulados, encuentra que las transformacines para pasar de un sistema de referencia a otro deben ser diferentes a las de Galileo. De hecho, las transformaciones fueron previamente definidas por Lorentz, aunque el las consideró como unas ecuaciones que se usaban solamente para descibir el electromagnetismo según las ecuaciones de Maxwell. Einstein las amplía a toda la física.

3.1. Transformaciones de Lorentz.

Son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut) \\
y' &= y \\
z' &= z \\
t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(t-\frac{ux}{c^2})
\end{aligned}
$$

donde $u < c$ y se suele escribir $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \geq 1$. Es claro que si $u << c$ entonces $\gamma \approx 1$ y se vuelven a tener las ecuaciones de transformación de Galileo.

Veamos a continuación la invariancia de la velocidad de la luz. Supongamos que desde un sistema de referencia en reposo A se emite una señal luminosa desde 0 de forma que un detector de luz situado a una distancia L detecta la señal. Al principio $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$.

Cuando la luz llega al detector $t_1 = T$ y $x_1 = c \cdot T = L$. Por tanto, desde el sistema de referencia A, la velocidad de la luz es:

$$v_l^{(A)} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{c \cdot T}{T} = c$$

Supongamos ahora un sistema de referencia B que se mueve con velocidad u en el mismo sentido que la luz. Clásicamente cabría esperar que la luz fuese más lentamente vista desde B. Inicialmente $t'_0 = 0$ y $x'_0 = 0$.

Aplicando de nuevo las ecuaciones de Lorentz, se tiene

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(cT - uT)$$

$$t'_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(T - \frac{u \cdot cT}{c^2}\right)$$

Entonces la velocidad de la luz medida desde B es:

$$v_l^{(B)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(cT-uT)}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(T-\frac{uT}{c}\right)} = c$$

Luego la velocidad de la luz es invariante. Además ningún suceso puede superar esta velocidad.

Por último cabe destacar que los relojes marchan de forma diferente en A y en B. Por eso, dos sucesos simultáneos en A no tiene porque serlo en B.

3.2. Contracción del espacio.

Sea una barra de longitud L que está en reposo en el sistema A. Sus extremos están definidos por $(x_0 = 0, t_0)$ y $(x_1 = L, t_1)$, para cualquier t_0 y t_1. (L es la longitud propia de la barra[1]).

Si observamos la barra desde el sistema B, las coordenadas de sus extremos serán:

$$\begin{array}{r|l} x'_0 = \gamma(x_0 - ut_0) & x'_1 = \gamma(L - ut_1) \\ t'_0 = \gamma\left(t_0 - \dfrac{uL}{c^2}\right) & t'_1 = \gamma\left(t_1 - \dfrac{uL}{c^2}\right) \end{array}$$

La longitud medida desde B es $L^B = (x'_1 - x'_0)$ donde suponemos $t'_1 = t'_0$. Entonces $t_1 - \frac{uL}{c^2} = t_0$, es decir, si en el sistema B $t'_1 = t'_0$ el suceso es simultáneo, no tiene porque serlo en A.

Si medimos ahora la longitud:

$$L^B = \gamma(L - u(t_1 - t_0)) = \gamma\left(L - \frac{u^2}{c^2}L\right) = \gamma L\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \gamma\frac{1}{\gamma^2}L = \frac{L}{\gamma}$$

con $\gamma > 1$. Es decir, la longitud medida respecto de un sistema B que se mueva será menor que la medida respecto de A. Esto ocurre solo en la dirección del movimiento. Es la contracción de Lorentz-Fitzgerald.

3.3. Dilatación del tiempo.

Sean dos sucesos que ocurren en el sistema A en el mismo punto (2 'tics' en un reloj), separados por un tiempo T (tiempo propio)

$$\begin{array}{r|c} x_0 = 0, t_0 = 0 & x_1 = 0, t_1 = T \\ x'_0 = 0, t'_0 = T & x'_1 = \gamma(-uT), t'_1 = \gamma T \end{array}$$

El tiempo entre los dos sucesos en el sistema B es:

$$(t'_1 - t'_0) = \gamma T = T^B$$

es decir,

[1] Es decir, la longitud medida en el sistema de referencia en el que el objeto está en reposo.

el tiempo transcurrido entre dos sucesos es siempre más largo en un sistema en movimiento que en un sistema en que los sucesos ocurren en el mismo punto.

3.4. Ejemplo.

Una nave se mueve a una velocidad de 0'6c. La longitud propia de la nave es 100 m.

- Desde la nave se mide que $L = 100\ m$.
- Desde la Tierra, la nave mide $L_B = L/\gamma = 80\ m$.
- Desde el punto de vista de la Tierra, todo lo que hay en la nave se contrae en la dirección del movimiento de esta.
- Desde la nave se ve a la Tierra contraida de igual manera.
- Respecto al tiempo, en la nave un reloj marca 1 'tic' cada segundo.
- Desde la Tierra el reloj de la nave marca 1 'tic' cada 1'25 s.

3.5. Ejemplo.

Una nave parte de la Tierra con velocidad constante $u = 0'8\ c$ con destino a α-centauri a 4 años-luz.

- En el sistema A (Tierra, α-centauri), el tiempo de ida es

$$\frac{D^A}{u} = \frac{4 \text{ años-luz}}{0'8\ c} = 5 \text{ años}$$

- En el sistema B (la nave), la distancia (Tierra-α) se ve contraida

$$D^B = \frac{D^A}{\gamma} = 4 \cdot 0'6 = 2'4 \text{ años-luz}$$

. El tiempo que tarda la nave según mide la nave es

$$\frac{D^B}{u} = \frac{2'4}{0'8\ c} = 3 \text{ años}$$

.

3.6. Paradoja de los gemelos.

Dos gemelos (Homero y Ulises) de 30 años son astronautas. Homero, como está resfriado se queda en la Tierra, mientras su hermano inicia un viaje a α-centauri a una velocidad $u = 0'8\ c$ y vuelve.

Mientras Homero espera $5 + 5 = 10$ años, y tiene y aparenta 40 años, hasta que llega su hermano, Ulises ha envejecido $3 + 3 = 6$ años, por lo que tiene y aparenta 36 años.

Este hecho ha sido comprobado experimentalmente, considerando la marcha de relojes, uno en reposo en la tierra, y otro que se introduce en un avión supersónico que da varias vueltas a la tierra. El reloj que se queda "quieto" avanza más que el que se mueve y luego vuelve al mismo punto.

Esta diferencia de tiempos es una consecuencia clara de la relatividad. Lo que resulta paradójico, es que uno no pueda considerar un sistema de referencia que la nave es la que está quieta y lo que se mueve son la tierra y alfa centauri. Si este fuera el caso, el de la nave (Ulises) envejecería 10 años, y el de la tierra (Homero) 6 años. Un análisis detallado lleva a que la diferencia es que mientras el sistema fijo en la tierra es un sistema aproximadamente inercial, el que va y vuelve con la nave no lo es (hay que cambiar la velocidad de $0{,}8c$ a $-0{,}8c$).

3.7. Transformación de velocidades.

Sea un sistema A en reposo, otro B que se mueve respecto a A con velocidad constante $\boldsymbol{u}$ y una partícula que se mueve respecto de A con velocidad $\boldsymbol{v}$(con $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$). Entonces para el sistema A, la velocidad de la partícula se escribe como:

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

teniendo que $(x_0 = 0, t_0 = 0)$ y $(x_1 = v \cdot T, t_1 = T)$.

Para el sistema B, $(x'_0 = 0, t'_0 = 0)$ y $\left(x'_1 = \gamma(x_1 - ut_1), t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{ux_1}{c^2}\right)\right)$ de donde

$$v' = \frac{x'_1 - x'_0}{t'_1 - t'_0} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

4. Dinámica relativista.

4.1. Expresión relativista del momento.

Partimos de un experimento sencillo, cuyo resultado es evidente: dos partículas con masas iguales y velocidades opuestas colisionan. Al final las partículas quedan unidas y su velocidad es nula. En mecánica clásica, este proceso conserva la masa, el momento y la energía. Es más, si cambiamos de referencia, haciendo uso de las transformaciones de Galileo, se cumplen las misma leyes de conservación.

No obstante, hemos visto que las transformaciones de Galileo deben ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz. Por ello, el proceso anterior en un sistema de referencia B que se mueve con respecto a A con velocidad u, el proceso se ve

Si se considera que $\vec{p} = \sum m\vec{v}$, entonces el momento no se conservaría.

Para hacer consistenete las transformaciones de Lorentz (que tienen su origen en la constancia de c) con la conservación del momento (que tiene su origen en el principio de relatividad) es necesario la redefinición del momento.

Einstein propone la expresión $p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v$ para una partícula cuya masa en reposo es m_0 y su velocidad es v. Ello puede interpretarse como que la masa de una partícula en movimiento viene dada por $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; por tanto, crece con la velocidad. El momento sería entonces $p = m(v) \cdot v$.

Vamos a ver que dicha expresión es consistente con las transformaciones de Lorentz.

En el sistema A, la conservación de la masa implica que

$$m_{F0} = m_1(v) + m_2(v) = 2m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

En el sistema B

$$m_{F0} = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(v-u)^2}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2}\frac{1}{c^2}}} + m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(-v-u)^2}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2}\frac{1}{c^2}}} = 2m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Puede comprobarse que, a partir de la relación de masas del sistema A, se obtiene la relación en B

$$m_0 \frac{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v-u}{c}\right)^2}} + m_0 \frac{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v+u}{c}\right)^2}} = m_{F0} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

En el sistema A, la conservación del momento se da trivialmente. En el sistema B, se tiene

$$m_1(v_1') \cdot v_1' + m_2(v_2') \cdot v_2' = -m_F(u) \cdot u$$

es decir,

$$\frac{m_0\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v-u}{\left(1-\frac{uv}{c^2}\right)} + \frac{m_0\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{-v-u}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)} = m_F(u) \cdot u$$

De hecho, la expresión $p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v$ es la única función de la velocidad que consistente con las transformaciones de Lorentz. Nótese que para $v << c$, es $m(v) = m_0$, y $p = m_0 v$.

4.2. Expresión relativista de la energía. Energía en reposo.

La **energía cinética** es igual al trabajo necesario para llevar a una masa en reposo m_0 hasta una velocidad v.

$$K = W(0 \longrightarrow v) = \int F \cdot dx$$

De las ecuaciones de Newton,

$$F = m \cdot a = m\frac{dv}{dt}$$

es equivalente a

$$F = \frac{dp}{dt}$$

si m es constante.

Cuando se pasa a una situación relativista, m depende de v y ambas expresiones no son equivalentes. La que tiene sentido en un contexto relativista es $F = \frac{dp}{dt}$. En ese caso, como

$$K = \int \frac{dp}{dt} \cdot dx$$

pero $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ depende sólo de v; por tanto

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dt}$$

y como $dx = v\ dt$ se tiene que

$$K = \int_0^v \frac{dp}{dv} v\ dv$$

Derivando p:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - m_0 v \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Entonces:

$$K = \int_0^v \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} v\ dv =$$

haciendo el cambio $z = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, $dz = -\frac{2v}{c^2}dv$:

$$= \int_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{-m_0c^2\ dz}{2z^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{m_0c^2}{z^{\frac{1}{2}}}\right]_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

Einstein llamó al término $m_0c^2 = E_0$, *energía en reposo*. Contiene toda la energía no cinética de la partícula. La energía total E es la suma de la energía en reposo E_0 más la energía cinética K

$$E = E_0 + K = mc^2$$

La energía total E es por tanto proporcional a la masa m. De esa forma se observa cómo, en la teoría de la relatividad, la conservación de la masa es equivalente a la conservación de la energía ya que ambas están relacionadas por una constante universal c^2.

Si cambiamos por cualquier procedimiento la energía de un objeto (por ejemplo, al calentarlo), se modificará también su masa en una cantidad $\Delta m = \Delta E/c^2$. Esta cantidad es insignificante para los procesos químicos y físicos habituales, aunque es importante para los procesos nucleares, en los que las energías que se ponen en juego (varios MeV) son comparables a la masa de un protón o un neutrón (939 MeV/c^2).

De hecho, toda la masa de una partícula se puede convertir en energía, si se encuentra con antimateria, según se verá en el tema de estructura de la materia.